II.3 Règles opératoires sur les ensembles dénombrables

Proposition II.12 (Construction d'ensembles dénombrables)**.** *1. Si E et F sont au plus dénombrables, alors $E \times F$ est au plus dénombrable. 2. Plus généralement, un produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ d'un nombre fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. Si l'un d'eux est dénombrable et les autres non vides, alors le produit est dénombrable. 3. Une union d'un nombre au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. Si l'un des ensembles est dénombrable, l'union est dénombrable.*

Éléments de preuve. 1. Construire une surjection par composition : $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to E \times F$ 2. Récurrence 3. Supposons les ensembles indexés sur I dénombrable. Construire une surjection

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to I \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} A_i.$$

□

Corollaire II.13. *1. L'ensemble Z est dénombrable. 2. L'ensemble N° est dénombrable. 3. L'ensemble Q des rationnels est dénombrable.*

Un résultat important sur les familles sommables découle de ces propriétés. On rappelle la définition suivante.

Définition II.14 (Support d'une famille de scalaires)**.** *Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes. Le support de a est l'ensemble*

$$J = \{i \in I \mid a_i \neq 0\}.$$

Proposition II.15 (Support d'une famille sommable)**.** *Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes. Si a est sommable, alors le support de a est au plus dénombrable.*

Éléments de preuve. Se ramener au cas d'une famille réelle positive, en contrôlant le support de a en fonction de celui des parties positives et négatives de ses parties réelles et imaginaires. Dans le cas positif, exprimer le support en fonction des

$$I_\varepsilon = \{i \in I \mid a_i > \varepsilon\}.$$

Que peut-on dire du cardinal de I_ε ? □

II.4 Des ensembles infinis non dénombrables

Comme on l'a vu, des ensembles qui semblent bien plus gros que N sont dénombrables, donc ont dans les faits « autant » d'éléments que N. Une question qui peut se poser alors est de savoir si tous les ensembles infinis ont même cardinal, ou s'il existe d'autres cardinaux (plus gros). Un premier élément de réponse provient de l'étude du cardinal de R, à partir de l'écriture décimale d'un nombre réel. On rappelle qu'un nombre réel admet un et un seul développement décimal, à condition d'exclure les développements terminant uniquement par une infinité de 9.

Théorème II.16 (Cardinal de R, Cantor)**.** *L'ensemble des réels R est non dénombrable.*

Éléments de preuve. (démonstration non exigible) Sinon, considérer une énumération $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de tous les réels, et considérer un y tel que le n-ième chiffre après la virgule de y soit distinct de 0, 9 et du n-ième chiffre de x_n. Le réel y peut-il être dans l'énumération ? Pourquoi prendre la précaution de prendre les chiffres distincts de 0 et 9 ? □

Cette preuve est connue sous le nom d'« argument diagonal de Cantor », dont une généralisation donne un deuxième élément de réponse à la question initiale :

Théorème II.17 (Cantor, HP)**.** *Soit X un ensemble infini. Alors $Card(X) < Card(\mathcal{P}(X))$ (i.e. X est subpotent à $\mathcal{P}(X)$, mais pas équipotent)*

Éléments de preuve. S'il existe une surjection $f : X \to P(X)$, considérer $Y \subset X$ constitué des éléments x tels que $x \notin f(x)$, et obtenir une contradiction en considérant l'appartenance de c à Y, c étant un élément de X tel que $f(c) = Y$. □

On peut donc construire une chaîne infinie d'ensembles ayant des cardinaux strictement croissants. Il y a donc une infinité de cardinaux infinis distincts.

Remarque II.18. *En quoi le résultat précédent empêche-t-il l'existence d'un « ensemble des ensembles » ?*

Familles sommables

Il n'est pas très dur de remarquer qu'en général, changer l'ordre de sommation dans une série modifie la valeur de la somme et même les propriétés de convergence (lorsque la série est semi-convergente initialement). Ainsi, l'ordre dans lequel s'effectue la sommation semble avoir une importance. Dans de nombreuses situations pourtant, on souhaite sommer des valeurs sans avoir un ordre privilégié. C'est le cas par exemple pour les calculs de probabilités, ou d'espérance, n'ayant pas d'ordre privilégié sur l'ensemble des valeurs prises par une variable X, n'ayant pas la possibilité en général de les numéroter dans l'ordre croissante, s'il y a des points d'accumulation). Nous présentons dans ce chapitre un moyen de s'affranchir de cet ordre de sommation sous certaines hypothèses.

II.5 Familles sommables de nombres réels positifs

On rappelle que l'opération $a + \infty$ est bien définie, égale à $+\infty$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+$. En particulier, tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}_+$ peut être sommé dans $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, $\mathbb{R}_+$ peut être muni d'une relation d'ordre total prolongeant l'ordre de $\mathbb{R}_+$ en posant $+\infty > a$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+$. Tout sous-ensemble X de $\mathbb{R}_+$ admet alors une borne supérieur dans $\mathbb{R}_+$ muni de cet ordre :

- s'il est non vide et majoré par un réel, d'après la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$
- s'il est non vide et majoré par aucun réel, alors $+\infty$ est son seul majorant, donc aussi le plus petit des majorants.
- s'il est vide, tout élément de $\mathbb{R}_+$ est un majorant donc le plus petit des majorants (la borne supérieure) est 0.

Remarquez l'importance de bien préciser l'ensemble ordonné de référence pour le dernier cas : la borne supérieure de $\varnothing$ dans $\mathbb{R}_+$ n'est pas la même que dans $\mathbb{R}$ entier. Pour tout ensemble I, on note $P_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.
Pour motiver la définition de la sommabilité, on reexprime la convergence d'une série à termes positifs de façon à ne plus faire intervenir l'ordre (infini) de sommation, grâce à une version symétrisée dans laquelle toutes les sommes finies ont des rôles équivalents, et plus seulement les sommes partielles.

Théorème II.19 (Reexpression de la convergence des STP)**.** *Soit $\sum a_n$ une STP. Alors $\sum_{k=0}^{+\infty} a_n$ est bien définie dans $\mathbb{R}$ et*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_n = \sup \left\{ \sum_{k \in J} a_k,\ J \in P_f(\mathbb{N}) \right\}.$$

En particulier, $\sum a_n$ converge si et seulement si l'ensemble de toutes les sommes finies est majoré.