II.3 Règles opératoires sur les ensembles dénombrables

Proposition II.12 (Construction d'ensembles dénombrables)**.** *1. Si E et F sont au plus dénombrables, alors $E \times F$ est au plus dénombrable. 2. Plus généralement, un produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ d'un nombre fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. Si l'un d'eux est dénombrable et les autres non vides, alors le produit est dénombrable. 3. Une union d'un nombre au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. Si l'un des ensembles est dénombrable, l'union est dénombrable.*

Éléments de preuve. 1. Construire une surjection par composition : $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to E \times F$ 2. Récurrence 3. Supposons les ensembles indexés sur I dénombrable. Construire une surjection

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to I \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} A_i.$$

□

Corollaire II.13. *1. L'ensemble Z est dénombrable. 2. L'ensemble N° est dénombrable. 3. L'ensemble Q des rationnels est dénombrable.*

Un résultat important sur les familles sommables découle de ces propriétés. On rappelle la définition suivante.

Définition II.14 (Support d'une famille de scalaires)**.** *Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes. Le support de a est l'ensemble*

$$J = \{i \in I \mid a_i \neq 0\}.$$

Proposition II.15 (Support d'une famille sommable)**.** *Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes. Si a est sommable, alors le support de a est au plus dénombrable.*

Éléments de preuve. Se ramener au cas d'une famille réelle positive, en contrôlant le support de a en fonction de celui des parties positives et négatives de ses parties réelles et imaginaires. Dans le cas positif, exprimer le support en fonction des

$$I_\varepsilon = \{i \in I \mid a_i > \varepsilon\}.$$

Que peut-on dire du cardinal de I_ε ? □

II.4 Des ensembles infinis non dénombrables

Comme on l'a vu, des ensembles qui semblent bien plus gros que N sont dénombrables, donc ont dans les faits « autant » d'éléments que N. Une question qui peut se poser alors est de savoir si tous les ensembles infinis ont même cardinal, ou s'il existe d'autres cardinaux (plus gros). Un premier élément de réponse provient de l'étude du cardinal de R, à partir de l'écriture décimale d'un nombre réel. On rappelle qu'un nombre réel admet un et un seul développement décimal, à condition d'exclure les développements terminant uniquement par une infinité de 9.

Théorème II.16 (Cardinal de R, Cantor)**.** *L'ensemble des réels R est non dénombrable.*

Éléments de preuve. (démonstration non exigible) Sinon, considérer une énumération $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de tous les réels, et considérer un y tel que le n-ième chiffre après la virgule de y soit distinct de 0, 9 et du n-ième chiffre de x_n. Le réel y peut-il être dans l'énumération ? Pourquoi prendre la précaution de prendre les chiffres distincts de 0 et 9 ? □