II.2 Dénombrabilité

Définition II.5 (Ensemble dénombrable)**.** *Soit E un ensemble. On dit que : - E est dénombrable s'il est de même cardinal que $\mathbb{N}$; - au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.*
Ainsi, E est dénombrable si et seulement s'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to E$.

Proposition II.6 (Dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$)**.** *Le produit cartésien $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.*

Éléments de preuve. Construire une bijection en diagonales. Ou bien utiliser une bijection classique entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}^*$, basée sur l'étude des facteurs pairs de la décomposition de n en produit de facteurs premiers. □

Nous souhaitons caractériser les ensembles au plus dénombrables à l'aide des sous-ensembles de $\mathbb{N}$. Pour cela, nous commençons pas établir un lemme sur le cardinal des sous-ensembles de $\mathbb{N}$.

Lemme II.7. *Tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable.*

Éléments de preuve. Considérer un sous-ensemble $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, non fini. Construire par récurrence une application injective de $[0, n]$ dans E, en rajoutant à chaque étape le minimum des éléments non encore utilisés. Cela définit une bijection $\mathbb{N} \to E$. □

Proposition II.8 (Première caractérisation des ensembles au plus dénombrables)**.** *Un ensemble E est au plus dénombrable si et seulement s'il peut être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.*

Éléments de preuve. Un sens est évident par les définitions de la finitude ou de la dénombrabilité. L'autre provient du lemme. □

Nous donnons une deuxième caractérisation des ensembles au plus dénombrables en terme de surjection ou d'injection. Cette caractérisation est plus souple pour prouver les différentes propriétés de dénombrabilité liées aux constructions ensemblistes. Cette caractérisation nécessite un petit lemme.

Lemme II.9 (Inversibilité à gauche ou droite des injections et surjections)**.** *Soit $f : E \to F$. 1. Si f est injective, il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$, et g est alors surjective. 2. Si f est surjective, il existe $g : E \to F$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$, et g est alors injective.*

Éléments de preuve. On construit g associant à y un antécédent de ses antécédents. Dans le premier cas, on n'a pas le choix quand on est dans l'image de f, et sinon, on définit g comme on veut. Dans le deuxième cas, on doit choisir parmi les antécédents de y. □

Remarque II.10. • *Ce sont en fait des équivalences.* • *On utilise l'axiome du choix (qui affirme la possibilité de pouvoir faire simultanément une infinité de choix).*

Proposition II.11 (Deuxième caractérisation des ensembles au plus dénombrables)**.** *Soit E un ensemble non vide. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes : (i) E est au plus dénombrable (ii) il existe une fonction injective $f : E \to \mathbb{N}$. (iii) il existe une fonction surjective $f : \mathbb{N} \to E$.*

Éléments de preuve. • $(i) \implies (ii)$: considérer une bijection $E \to F \subset \mathbb{N}$, et composer par l'injection canonique. • $(ii) \implies (iii)$: c'est l'inversibilité à gauche d'une injection • $(iii) \implies (ii)$: c'est l'inversibilité à droite d'une surjection. Pourquoi l'axiome du choix n'est-il pas nécessaire ici ? • $(ii) \implies (i)$: corestriction à l'image. □

II.3 Règles opératoires sur les ensembles dénombrables

Proposition II.12 (Construction d'ensembles dénombrables)**.** *1. Si E et F sont au plus dénombrables, alors $E \times F$ est au plus dénombrable. 2. Plus généralement, un produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ d'un nombre fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. Si l'un d'eux est dénombrable et les autres non vides, alors le produit est dénombrable. 3. Une union d'un nombre au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. Si l'un des ensembles est dénombrable, l'union est dénombrable.*

Éléments de preuve. 1. Construire une surjection par composition : $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to E \times F$ 2. Récurrence 3. Supposons les ensembles indexés sur I dénombrable. Construire une surjection

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to I \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} A_i.$$

□

Corollaire II.13. *1. L'ensemble Z est dénombrable. 2. L'ensemble N° est dénombrable. 3. L'ensemble Q des rationnels est dénombrable.*

Un résultat important sur les familles sommables découle de ces propriétés. On rappelle la définition suivante.

Définition II.14 (Support d'une famille de scalaires)**.** *Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes. Le support de a est l'ensemble*

$$J = \{i \in I \mid a_i \neq 0\}.$$

Proposition II.15 (Support d'une famille sommable)**.** *Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes. Si a est sommable, alors le support de a est au plus dénombrable.*

Éléments de preuve. Se ramener au cas d'une famille réelle positive, en contrôlant le support de a en fonction de celui des parties positives et négatives de ses parties réelles et imaginaires. Dans le cas positif, exprimer le support en fonction des

$$I_\varepsilon = \{i \in I \mid a_i > \varepsilon\}.$$

Que peut-on dire du cardinal de I_ε ? □

II.4 Des ensembles infinis non dénombrables

Comme on l'a vu, des ensembles qui semblent bien plus gros que N sont dénombrables, donc ont dans les faits « autant » d'éléments que N. Une question qui peut se poser alors est de savoir si tous les ensembles infinis ont même cardinal, ou s'il existe d'autres cardinaux (plus gros). Un premier élément de réponse provient de l'étude du cardinal de R, à partir de l'écriture décimale d'un nombre réel. On rappelle qu'un nombre réel admet un et un seul développement décimal, à condition d'exclure les développements terminant uniquement par une infinité de 9.

Théorème II.16 (Cardinal de R, Cantor)**.** *L'ensemble des réels R est non dénombrable.*

Éléments de preuve. (démonstration non exigible) Sinon, considérer une énumération $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de tous les réels, et considérer un y tel que le n-ième chiffre après la virgule de y soit distinct de 0, 9 et du n-ième chiffre de x_n. Le réel y peut-il être dans l'énumération ? Pourquoi prendre la précaution de prendre les chiffres distincts de 0 et 9 ? □