Méthode I.21 (Démonstration ou interprétation combinatoire d'une formule)**.** *- Interpréter combinatoriement une formule permet d'en avoir une compréhension intuitive et naturelle, qui aide à la retenir ou à la retrouver. - Cela permet également éventuellement de la démontrer, comme la formule de Vandermonde ci-dessus. - Pour démontrer ou interpréter combinatoriement une formule, chercher un modèle adéquat, et dénombrer de deux façons différentes, par exemple de façon directe et en effectuant un tri, ou bien en effectuant des choix successifs dans des ordres différents etc.*

Exemple I.22. *Interpréter combinatoriement la formule*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Méthode I.23 (Signes, principe de l'interrupteur)**.** *- Une formule combinatoire ne contient a priori que des termes positifs. Certaines formules contenant aussi des signes négatifs peuvent quand même se démontrer combinatoriement, en réarrageant l'égalité de sorte à passer les termes négatifs de l'autre côté. On a alors deux quantités à comparer, ce qu'on peut faire combinatoriement, par exemple en établissant des bijections. - Une situation classique : des signes qui alternent devant une expression avec des coefficients binomiaux : il s'agit de comparer des ensembles ayant des cardinaux de parité différente pour cela, faire entrer ou sortir un élément (interrupteur qu'on allume ou éteint). On illustre cela dans l'exemple qui suit, qui est à peu près le plus simple du genre.*

Exemple I.24. *Montrer combinatoriement que*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \text{ si } n > 0.$$

II. Dénombrabilité

II.1 Cardinaux infinis

On ne peut pas définir d'emblée (en tout cas pas simplement) de cardinal d'un ensemble fini. Cantor fait une construction (compliquée) qui permet de définir des cardinaux (ou plutôt des classes cardinales) de façon explicite, mais ce n'est pas l'objet de ce cours. Nous nous contentons de définir la condition d'égalité des cardinaux.

Définition II.1 (Ensembles de même cardinal)**.** *Soit E et F deux ensembles. - On dit que E et F ont même cardinal s'il existe une bijection $f : E \to F$. On dit aussi que E est équipotent à F. - On dit que E est subpotent à F (ou que le cardinal de E est strictement inférieur à celui de F) s'il existe une injection de E dans F.*

Remarque II.2 ((HP))**.** *- On peut montrer que la relation de subpotence vérifie les propriétés d'une relation d'ordre sur les classes cardinales. L'antisymétrie provient d'un théorème classique dû à Cantor et Berstein, affirmant que s'il existe une injection $f : E \to F$, et une injection $g : F \to E$, alors il existe une bijection $E \to F$. - Avec l'axiome du choix, on peut montrer que cette « relation d'ordre » est totale.*

Attention, certaines intuitions sur les comparaisons de cardinaux d'ensembles finis peuvent être fausses dans ce contexte.

Remarque II.3 (Avertissement)**.** *Deux ensembles vérifiant une inclusion stricte $E \subsetneq F$ peuvent être de même cardinal. Pourtant F contient strictement plus d'éléments que E.*

Exemple II.4 (Hôtel de Hilbert)**.** *$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ tel que $f(n) = n + 1$ est une bijection. Donc $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ ont même cardinal.*

II.2 Dénombrabilité

Définition II.5 (Ensemble dénombrable)**.** *Soit E un ensemble. On dit que : - E est dénombrable s'il est de même cardinal que $\mathbb{N}$; - au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.*
Ainsi, E est dénombrable si et seulement s'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to E$.

Proposition II.6 (Dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$)**.** *Le produit cartésien $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.*

Éléments de preuve. Construire une bijection en diagonales. Ou bien utiliser une bijection classique entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}^*$, basée sur l'étude des facteurs pairs de la décomposition de n en produit de facteurs premiers. □

Nous souhaitons caractériser les ensembles au plus dénombrables à l'aide des sous-ensembles de $\mathbb{N}$. Pour cela, nous commençons pas établir un lemme sur le cardinal des sous-ensembles de $\mathbb{N}$.

Lemme II.7. *Tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable.*

Éléments de preuve. Considérer un sous-ensemble $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, non fini. Construire par récurrence une application injective de $[0, n]$ dans E, en rajoutant à chaque étape le minimum des éléments non encore utilisés. Cela définit une bijection $\mathbb{N} \to E$. □

Proposition II.8 (Première caractérisation des ensembles au plus dénombrables)**.** *Un ensemble E est au plus dénombrable si et seulement s'il peut être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.*

Éléments de preuve. Un sens est évident par les définitions de la finitude ou de la dénombrabilité. L'autre provient du lemme. □

Nous donnons une deuxième caractérisation des ensembles au plus dénombrables en terme de surjection ou d'injection. Cette caractérisation est plus souple pour prouver les différentes propriétés de dénombrabilité liées aux constructions ensemblistes. Cette caractérisation nécessite un petit lemme.

Lemme II.9 (Inversibilité à gauche ou droite des injections et surjections)**.** *Soit $f : E \to F$. 1. Si f est injective, il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$, et g est alors surjective. 2. Si f est surjective, il existe $g : E \to F$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$, et g est alors injective.*

Éléments de preuve. On construit g associant à y un antécédent de ses antécédents. Dans le premier cas, on n'a pas le choix quand on est dans l'image de f, et sinon, on définit g comme on veut. Dans le deuxième cas, on doit choisir parmi les antécédents de y. □

Remarque II.10. • *Ce sont en fait des équivalences.* • *On utilise l'axiome du choix (qui affirme la possibilité de pouvoir faire simultanément une infinité de choix).*

Proposition II.11 (Deuxième caractérisation des ensembles au plus dénombrables)**.** *Soit E un ensemble non vide. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes : (i) E est au plus dénombrable (ii) il existe une fonction injective $f : E \to \mathbb{N}$. (iii) il existe une fonction surjective $f : \mathbb{N} \to E$.*

Éléments de preuve. • $(i) \implies (ii)$: considérer une bijection $E \to F \subset \mathbb{N}$, et composer par l'injection canonique. • $(ii) \implies (iii)$: c'est l'inversibilité à gauche d'une injection • $(iii) \implies (ii)$: c'est l'inversibilité à droite d'une surjection. Pourquoi l'axiome du choix n'est-il pas nécessaire ici ? • $(ii) \implies (i)$: corestriction à l'image. □