III.2 Approximations uniformes classiques

On généralise la définition des fonctions en escalier, vues dans le cadre de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle que F est un e.v.n. de dimension finie.

Définition III.8 (Fonctions en escalier)**.** *La fonction $f : [a,b] \to F$ est une fonction en escalier s'il existe une subdivision*

$$a = \sigma_0 < \cdots < \sigma_n = b$$

de $[a,b]$ telle que f est constante sur chaque intervalle $[\sigma_i, \sigma_{i+1}[$ de la subdivision. On note Esc$([a,b],F)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$, à valeurs dans F.

Un premier théorème d'approximation uniforme a déjà été vu dans le cas réel au moment de définir l'intégrale de Riemann.

Théorème III.9 (Approximation uniforme de C^0 par Esc)**.** *Les fonctions continues sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans un e.v.n. F de dimension finie peuvent être approchées uniformément par des fonctions en escalier sur $[a,b]$.*
Autrement dit, Esc$([a,b],F)$ est dense dans $C^0([a,b],F)$.

Éléments de preuve. Cela provient de la continuité uniforme de f, issue du théorème de Heine. On peut alors considérer une subdivision régulière suffisamment fine.

□

On note $C^0_M(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues par morceaux de I dans $\mathbb{R}$.

Corollaire III.10 (Approximation uniforme de C^0_M par Esc)**.** *Les fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ peuvent être approchées uniformément par des fonctions en escalier sur $[a,b]$.*
Autrement dit, Esc$([a,b],F)$ est dense dans $C^0_M([a,b],F)$.

Éléments de preuve. Approcher uniformément f sur chaque part d'une subdivision associée (on peut à chaque fois prolonger $f_{|]\sigma_i,\sigma_{i+1}[}$ par continuité pour se ramener à une fonction continue sur un segment).

□

Un autre théorème est nettement plus délicat à obtenir. Sa démonstration est de fait hors-programme. On rappelle que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour S une partie de $\mathbb{R}$, on note $\mathbb{K}_S[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$, restreintes à S.

Théorème III.11 (théorème d'approximation uniforme de Weierstrass)**.** *Toute fonction f continue sur un segment $[a,b]$ peut être approchée uniformément par des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$, définies sur ce segment.*
Autrement dit, en notant $S = [a,b]$, $\mathbb{K}_S[x]$ est dense dans $C^0(S,\mathbb{K})$.

Éléments de preuve. Hors-programme. On le verra peut-être en DM.

□

Corollaire III.12 (Approximation par des fonctions C^∞)**.** *Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ peut être approchée uniformément par des fonctions de classe C^∞.*

Éléments de preuve. Les fonctions polynomiales sont de classe C^∞.

□

Exercice III.13. *Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ une fonction continue par morceaux. On rappelle que f est Riemann-intégrable et on pose :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

1. *Montrer que F est **continue** sur $[a,b]$.*
2. *Montrer que F est **Lipschitzienne** sur $[a,b]$. On précisera la constante de Lipschitz.*
3. *Si f est continue en un point $x_0 \in]a,b[$, montrer que F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Exercice III.14. *Lemme de Riemann-Lebesgue*
L'objectif est de montrer que pour $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{C})$:

$$\lim_{k\to\pm\infty} \int_a^b f(t)e^{ikt}dt = 0$$

1. ***Cas initial :** Soit φ la fonction indicatrice d'un intervalle $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, $\varphi = \chi_{[\alpha,\beta]}$. Montrer explicitement que :*
$$\lim_{k\to\pm\infty} \int_a^b \varphi(t)e^{ikt}dt = 0$$
2. ***Cas des fonctions en escalier :** En déduire la propriété pour toute fonction en escalier $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{C})$.*
3. ***Cas général (l'étape d'approximation) :** Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{C})$. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{C})$ tel que $||f-\varphi||_\infty \leq \varepsilon$.*
4. *Écrire l'inégalité permettant de conclure le Lemme pour f en utilisant φ et en faisant tendre k vers l'infini.*

Exercice III.15 (Application des Sommes de Riemann)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère la subdivision régulière $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour $k = 0,\dots,n$. La somme de Riemann à droite est :*

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

1. *En utilisant la formule de la limite des sommes de Riemann, calculer la limite de la suite u_n définie par :*
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}$$
2. *En adaptant la formule, calculer la limite de :*
$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}$$

Exercice III.16 (Développement Asymptotique des Sommes)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. On étudie la suite $y_m = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(\frac{k}{m})$. Montrer que y_m admet le développement asymptotique suivant :*

$$y_m = \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2m}(f(1)-f(0)) + O\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

Exercice III.17 (Caractérisation de la Fonction Nulle)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on ait :*

$$\int_a^b f(t)t^m dt = 0$$

Démontrer que f est identiquement nulle sur $[a,b]$. (Indication : Utiliser le Théorème de Weierstrass)

Exercice III.18 (Non-Densité sur le Cercle Unité). *L'algèbre des polynômes $\mathbb{C}[z]$ est-elle dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ (fonctions continues sur le cercle unité $\mathbb{S}^1$) ?*
1. On considère la fonction $f(z) = \bar{z}$ pour $z \in \mathbb{S}^1$.
2. Montrer par l'absurde que f ne peut pas être approchée uniformément par une suite de polynômes P_n en z.

Exercice III.19 (Densité de la Base de Fourier). *Montrer que l'espace vectoriel engendré par les fonctions trigonométriques Vect$(e^{ikx})_{k\in\mathbb{Z}}$ est dense dans l'espace des fonctions continues 2π-périodiques $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour la norme L^2.*