5. *Montrer que* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice II.28. *Soit* $u_n(\theta) = \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}$.

1. *Montrer que* $\sum_{n\geq 1} u_n(\theta)$ *converge uniformément sur tout intervalle* $[a, 2\pi - a]$, *avec* $a \in]0, \pi]$.
2. *Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur* $]0, 2\pi[$.

III. Approximations uniformes

III.1 Principes généraux

Définition III.1 (Approximation uniforme à ε près)**.** *Soit* $f : A \to F$ *une application d'une partie* A *de* E *dans l'e.v.n. de dimension finie* F. *On dit que* $g : A \to F$ *est une approximation uniforme de* f *à* ε *près si* $\|g - f\|_\infty \leq \varepsilon$. *On dira que* g *est une* ε*-approximation uniforme de* f.

Remarque III.2. *Cela implique implicitement que* $g - f$ *doit être borné ; mais* g *et* f *ne le sont pas nécessairement.*

Exemple III.3. *La fonction* $x \mapsto x^2$ *est une approximation uniforme à* $\varepsilon = \frac{1}{100}$ *près de* $x \mapsto x^2 + \frac{1}{100}\sin(x)$ *sur* $\mathbb{R}$.

On cherche à savoir si une fonction f donnée peut être approchée uniformément arbitrairement proche par des fonctions d'un certain type.

Définition III.4 (Approximation uniforme par un ensemble de fonctions)**.** *Soit* $\mathcal{G}$ *une partie de* F^A. *On dit que* $f : A \to F$ *peut être approchée uniformément par des fonctions de* $\mathcal{G}$ *si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $g \in \mathcal{G}$ *telle que* g *soit une* ε*-approximation uniforme de* f.

Exemple III.5. *On dit que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est en escalier si elle est en escalier sur tout* $[a, b]$. *On remarquera par exemple que* $x \mapsto E(x)$ *est alors en escalier sur* $\mathbb{R}$ *(mais non bornée). En effet, contrairement au cas d'une fonction en escalier sur un segment, on peut avoir une infinité de paliers. Soit* $L > 0$. *Montrer que toute fonction* L*-lipschitzienne* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *peut être approchée uniformément par des fonctions en escalier.*

Remarque III.6.

1. *Si* $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}(A, \mathbb{R})$, *alors les propositions suivantes sont équivalentes:*

   (i) f *peut être approchée uniformément par des fonctions de* $\mathcal{G}$.

   (ii) $f \in \overline{\mathcal{G}}$ *(pour la norme* $\|\cdot\|_\infty$*).*

   Dans ce cas, f *est nécessairement aussi bornée.*

2. *Ainsi, si* $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{B}$, *les propositions suivantes sont équivalentes:*

   (i) tout f *de* $\mathcal{F}$ *peut être approché uniformément par des fonctions de* $\mathcal{G}$;

   (ii) $\mathcal{G}$ *est dense dans* $\mathcal{F}$ *(pour la norme* $\|\cdot\|_\infty$*).*

Proposition III.7 (Caractérisation séquentielle)**.** *Une application* f *peut être approchée uniformément par des applications de* $\mathcal{G}$ *ssi il existe une suite* $(g_n) \in \mathcal{G}^{\mathbb{N}}$ *telle que* (g_n) *converge uniformément vers* f.

III.2 Approximations uniformes classiques

On généralise la définition des fonctions en escalier, vues dans le cadre de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle que F est un e.v.n. de dimension finie.

Définition III.8 (Fonctions en escalier)**.** *La fonction $f : [a,b] \to F$ est une fonction en escalier s'il existe une subdivision*

$$a = \sigma_0 < \cdots < \sigma_n = b$$

de $[a,b]$ telle que f est constante sur chaque intervalle $[\sigma_i, \sigma_{i+1}[$ de la subdivision. On note Esc$([a,b],F)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$, à valeurs dans F.

Un premier théorème d'approximation uniforme a déjà été vu dans le cas réel au moment de définir l'intégrale de Riemann.

Théorème III.9 (Approximation uniforme de C^0 par Esc)**.** *Les fonctions continues sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans un e.v.n. F de dimension finie peuvent être approchées uniformément par des fonctions en escalier sur $[a,b]$.*
Autrement dit, Esc$([a,b],F)$ est dense dans $C^0([a,b],F)$.

Éléments de preuve. Cela provient de la continuité uniforme de f, issue du théorème de Heine. On peut alors considérer une subdivision régulière suffisamment fine.

□

On note $C^0_M(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues par morceaux de I dans $\mathbb{R}$.

Corollaire III.10 (Approximation uniforme de C^0_M par Esc)**.** *Les fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ peuvent être approchées uniformément par des fonctions en escalier sur $[a,b]$.*
Autrement dit, Esc$([a,b],F)$ est dense dans $C^0_M([a,b],F)$.

Éléments de preuve. Approcher uniformément f sur chaque part d'une subdivision associée (on peut à chaque fois prolonger $f_{|]\sigma_i,\sigma_{i+1}[}$ par continuité pour se ramener à une fonction continue sur un segment).

□

Un autre théorème est nettement plus délicat à obtenir. Sa démonstration est de fait hors-programme. On rappelle que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour S une partie de $\mathbb{R}$, on note $\mathbb{K}_S[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$, restreintes à S.

Théorème III.11 (théorème d'approximation uniforme de Weierstrass)**.** *Toute fonction f continue sur un segment $[a,b]$ peut être approchée uniformément par des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$, définies sur ce segment.*
Autrement dit, en notant $S = [a,b]$, $\mathbb{K}_S[x]$ est dense dans $C^0(S,\mathbb{K})$.

Éléments de preuve. Hors-programme. On le verra peut-être en DM.

□

Corollaire III.12 (Approximation par des fonctions C^∞)**.** *Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ peut être approchée uniformément par des fonctions de classe C^∞.*

Éléments de preuve. Les fonctions polynomiales sont de classe C^∞.

□

Exercice III.13. *Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ une fonction continue par morceaux. On rappelle que f est Riemann-intégrable et on pose :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$