(ii) la série $\sum f_n$ converge simplement;

(iii) la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I.

Alors $S = \sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et pour tout $x \in I$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x).$$

L'hypothèse (iii) peut être remplacée par :

(iii') la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I.

Ce théorème permet donc de dériver une série terme à terme (sous les hypothèses idoines).

Théorème II.20 (Classe $\mathcal{C}^p$ d'une série)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions d'un intervalle I dans F, et $p \in \mathbb{N}$. On suppose que :*

(i) les f_n sont de classe $\mathcal{C}^p$ sur I;

(ii) la série $\sum f_n$ converge simplement sur I, et pour tout k tel que $1 \leq k \leq p-1$, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I;

(iii) la série $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur I.

Alors $S = \sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I, et pour tout $x \in I$, et tout $k \in [0, p]$,

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x).$$

L'hypothèse (iii) peut être remplacée par :

(iii') la série $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I.

Exemple II.21. *1. Montrer que ζ est dérivable à tout ordre sur $]1, +\infty[$, et exprimer sa dérivée à tout ordre sous forme d'une somme.*

2. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+n)\dots(k+1)x^k = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

On retrouve ainsi la formule du binôme négatif, déjà établie par récurrence en utilisant des produits de Cauchy.

II.3 Techniques asymptotiques

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques pistes, non exhaustives, pour l'étude asymptotique des sommes de séries de fonctions, au bord de leur domaine.

Méthode II.22 (Déterminer une limite)**.** *1. L'outil à privilégier, si possible, est le théorème de la double limite (interversion limite / somme). Attention au fait qu'on ne l'a donné que dans le cas où toutes les limites sont dans F (pas de limite infinie).*

2. Pour montrer qu'on a une limite infinie au bord du domaine, procéder par minoration. Dans le cas où les séries sont positives, on pourra commencer par minorer une somme partielle puis passer à la limite.

3. *On pourra aussi minorer terme à terme de sorte à se ramener à des séries dont l'étude est plus simple.*

Exemple II.23. *Déterminer la limite de ζ quand $x \to 1^+$.*
La méthode utilisée peut s'exprimer sous forme d'une proposition, mais la démonstration doit être remise en oeuvre à chaque fois.

Proposition II.24 (Limite infinie au bord du domaine, HP)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que :*

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq 0$,

(ii) les f_n sont continues en a, et $\sum f_n$ converge (simplement) sur $]a, b]$,

(iii) $\sum f_n(a)$ diverge.

Alors $\lim_{x\to a^+} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = +\infty$.
Cela s'adapte bien sûr aussi pour la borne supérieure de l'intervalle.

Méthode II.25 (Trouver un équivalent)**.** 1. *On peut deviner un équivalent. Par exemple en remplaçant le terme général par un terme qui lui est proche asymptotiquement. Dans ce cas,*

   - *on peut diviser par l'équivalent suspecté (ou son ordre de grandeur sans la constante) et essayer de se ramener au théorème de la double limite;*
   - *Si les ordres de grandeurs des différents termes de la série sont très différents au voisinage du point considéré, (si on a une décroissance rapide de ces ordres de grandeur), il se peut que la somme partielle fournisse un développement asymptotique. C'est ce qui se passe par exemple avec les séries entières $\sum a_n x^n$ en 0, comme on le verra. Cela permet de deviner les équivalents successifs, et donc de se ramener au premier point ci-dessus.*

2. *Dans le cas où pour tout x, $f_n(x) = g(n, x)$ où g est définie sur $[a, +\infty[\times I$, et est monotone par rapport à sa première variable (la deuxième étant fixée), on pourra faire une comparaison avec une intégrale.*

3. *Dans certains cas, on peut essayer, à l'aide de développements asymptotiques, de se ramener à des séries classiques qu'on sait expliciter.*

Exemple II.26. 1. *Équivalent en $+\infty$ de $\zeta(x) - 1$. Développement asymptotique à 3 termes de ζ en $+\infty$.*

2. *Équivalent en $+\infty$ de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+k^2}$.*

3. *Équivalent en $+\infty$ de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_n x)^n}{n!}$, où $a_n = (2^n + 1)^{\frac{1}{n+1}}$. On pourra faire un développement asymptotique de a_n.*

Exercice II.27. *Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}(x+n)}$.*

1. *Montrer que la série de fonctions de terme général f_n est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$. On note f sa somme.*

2. *Montrer que la série de fonctions de terme général f_n est normalement convergente sur $[0, M]$ pour tout $M > 0$. Est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$?*

3. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ puis qu'elle est dérivable et croissante sur $\mathbb{R}_+$.*

4. *Soit $n \geq 1$ et $x_0 \geq n \geq 1$. Montrer que $f(x_0) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.*

5. *Montrer que* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice II.28. *Soit* $u_n(\theta) = \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}$.

1. *Montrer que* $\sum_{n\geq 1} u_n(\theta)$ *converge uniformément sur tout intervalle* $[a, 2\pi - a]$, *avec* $a \in]0, \pi]$.
2. *Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur* $]0, 2\pi[$.

III. Approximations uniformes

III.1 Principes généraux

Définition III.1 (Approximation uniforme à ε près)**.** *Soit* $f : A \to F$ *une application d'une partie* A *de* E *dans l'e.v.n. de dimension finie* F. *On dit que* $g : A \to F$ *est une approximation uniforme de* f *à* ε *près si* $\|g - f\|_\infty \leq \varepsilon$. *On dira que* g *est une* ε*-approximation uniforme de* f.

Remarque III.2. *Cela implique implicitement que* $g - f$ *doit être borné ; mais* g *et* f *ne le sont pas nécessairement.*

Exemple III.3. *La fonction* $x \mapsto x^2$ *est une approximation uniforme à* $\varepsilon = \frac{1}{100}$ *près de* $x \mapsto x^2 + \frac{1}{100}\sin(x)$ *sur* $\mathbb{R}$.

On cherche à savoir si une fonction f donnée peut être approchée uniformément arbitrairement proche par des fonctions d'un certain type.

Définition III.4 (Approximation uniforme par un ensemble de fonctions)**.** *Soit* $\mathcal{G}$ *une partie de* F^A. *On dit que* $f : A \to F$ *peut être approchée uniformément par des fonctions de* $\mathcal{G}$ *si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $g \in \mathcal{G}$ *telle que* g *soit une* ε*-approximation uniforme de* f.

Exemple III.5. *On dit que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est en escalier si elle est en escalier sur tout* $[a, b]$. *On remarquera par exemple que* $x \mapsto E(x)$ *est alors en escalier sur* $\mathbb{R}$ *(mais non bornée). En effet, contrairement au cas d'une fonction en escalier sur un segment, on peut avoir une infinité de paliers. Soit* $L > 0$. *Montrer que toute fonction* L*-lipschitzienne* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *peut être approchée uniformément par des fonctions en escalier.*

Remarque III.6.

1. *Si* $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}(A, \mathbb{R})$, *alors les propositions suivantes sont équivalentes:*

   (i) f *peut être approchée uniformément par des fonctions de* $\mathcal{G}$.

   (ii) $f \in \overline{\mathcal{G}}$ *(pour la norme* $\|\cdot\|_\infty$*).*

   Dans ce cas, f *est nécessairement aussi bornée.*

2. *Ainsi, si* $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{B}$, *les propositions suivantes sont équivalentes:*

   (i) tout f *de* $\mathcal{F}$ *peut être approché uniformément par des fonctions de* $\mathcal{G}$;

   (ii) $\mathcal{G}$ *est dense dans* $\mathcal{F}$ *(pour la norme* $\|\cdot\|_\infty$*).*

Proposition III.7 (Caractérisation séquentielle)**.** *Une application* f *peut être approchée uniformément par des applications de* $\mathcal{G}$ *ssi il existe une suite* $(g_n) \in \mathcal{G}^{\mathbb{N}}$ *telle que* (g_n) *converge uniformément vers* f.