II.2 Régularité et interversions sur des sommes uniformes

On adapte dans cette section les résultats démontrés dans le cadre des suites. Dans la pratique en général, on tentera d'abord de démontrer la convergence normale sur des sous-parties adéquates de A, et sinon, on se ramènera aux études précédentes pour l'étude de la convergence uniforme.

Théorème II.14 (Continuité d'une somme infinie)**.** *Soit $\sum f_n$ une série uniformément convergente sur A. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A, alors $\sum f_n$ est continue sur A.*

Le théorème de la double limite s'adapte en un théorème d'interversion $\lim / \sum$.

Théorème II.15 (Passage à la limite sous $\sum$)**.** *Soit $\sum f_n$ une série uniformément convergente sur A et $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Soit $a \in \overline{A}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_n \in F$. Alors $\sum \ell_n$ converge, et f admet une limite en a, égale à*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

En d'autres termes,

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Exemple II.16. 1. *Déterminer* $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$.

2. *Déterminer* $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x)$.

Théorème II.17 (Intégration terme à terme sur un segment)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions* continues *d'un segment $I = [a, b]$ à valeurs dans un e.v.n. F de dimension finie.*

1. *Si $\sum f_n$ est uniformément convergente sur I, alors*

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)dt$$

converge uniformément sur I vers $x \mapsto \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt$.

2. *En particulier, si $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $[a, b]$,*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Exemple II.18. 1. *Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$,*

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}.$$

2. *À l'aide de l'exemple précédent, calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx$ (on intégrera d'abord sur $[0, c]$ avec $c \in]0, 1[$, puis on fera tendre c vers 1). On admettra que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.*

Théorème II.19 (Dérivation terme à terme)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions d'un intervalle I dans F, telles que :*

(i) les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I;

(ii) la série $\sum f_n$ converge simplement;

(iii) la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I.

Alors $S = \sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et pour tout $x \in I$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x).$$

L'hypothèse (iii) peut être remplacée par :

(iii') la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I.

Ce théorème permet donc de dériver une série terme à terme (sous les hypothèses idoines).

Théorème II.20 (Classe $\mathcal{C}^p$ d'une série)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions d'un intervalle I dans F, et $p \in \mathbb{N}$. On suppose que :*

(i) les f_n sont de classe $\mathcal{C}^p$ sur I;

(ii) la série $\sum f_n$ converge simplement sur I, et pour tout k tel que $1 \leq k \leq p-1$, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I;

(iii) la série $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur I.

Alors $S = \sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I, et pour tout $x \in I$, et tout $k \in [0, p]$,

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x).$$

L'hypothèse (iii) peut être remplacée par :

(iii') la série $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I.

Exemple II.21. *1. Montrer que ζ est dérivable à tout ordre sur $]1, +\infty[$, et exprimer sa dérivée à tout ordre sous forme d'une somme.*

2. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+n)\dots(k+1)x^k = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

On retrouve ainsi la formule du binôme négatif, déjà établie par récurrence en utilisant des produits de Cauchy.

II.3 Techniques asymptotiques

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques pistes, non exhaustives, pour l'étude asymptotique des sommes de séries de fonctions, au bord de leur domaine.

Méthode II.22 (Déterminer une limite)**.** *1. L'outil à privilégier, si possible, est le théorème de la double limite (interversion limite / somme). Attention au fait qu'on ne l'a donné que dans le cas où toutes les limites sont dans F (pas de limite infinie).*

2. Pour montrer qu'on a une limite infinie au bord du domaine, procéder par minoration. Dans le cas où les séries sont positives, on pourra commencer par minorer une somme partielle puis passer à la limite.