1. *Justifier l'existence de $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in [a, b]$,*
$$|x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
2. *Soit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ une subdivision de $[a, b]$ avec $x_{i+1} - x_i < \eta$ pour tout $i = 0, \ldots, p-1$. Démontrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$ et tout $i \in \{0, \ldots, p\}$,*
$$|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon.$$
3. *Soit $y \in I$ et soit $i \in \{0, \ldots, p\}$ tel que $y \in [x_i, x_{i+1}]$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$$f(x_i) - f_n(x_{i+1}) \leq f(y) - f_n(y) \leq f(x_{i+1}) - f_n(x_i).$$
4. *En déduire que (f_n) converge uniformément vers f sur I.*

II. Séries de fonctions

Le but de cette section est d'adapter les résultats obtenus pour les suites de fonctions au cas des séries de fonctions. Comme dans le cas numérique, on peut obtenir certains critères de convergence simple ou uniforme ne nécessitant pas de connaître la limite. Cela donne une bien meilleure efficacité que le point de vue des suites.
On pourra en bénéficier pour l'étude des suites de fonctions, puisque, comme dans le cas numérique, l'étude d'une limite de suite de fonctions (f_n) se ramène à l'étude de la série télescopique $\sum(f_n - f_{n-1})$.

II.1 Modes de convergence

On se donne E un espace vectoriel de dimension finie, F un e.v.n. de dimension finie, et A une partie de E, ainsi qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de A dans F.
On note, pour tout $x \in A$, et tout $n \in \mathbb{N}$,
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$
les sommes partielles de la série $\sum f_n$. Soit également $B \subset A$.

Définition II.1 (Convergence simple, convergence uniforme).
- *La série $\sum f_n$ converge simplement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.*
- *La série $\sum f_n$ converge uniformément sur B si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur B.*

En cas de convergence simple sur B, on notera dans la suite du chapitre
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in B, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$
les restes de la série $\sum f_n$.

Proposition II.2 (Caractérisation de la CVU par le reste). *On suppose que $\sum f_n$ converge simplement sur B. Alors $\sum f_n$ converge uniformément sur B si et seulement si R_n converge uniformément vers 0 sur B.*

Il suffit donc de majorer $R_n(x)$ par une suite indépendante de x, et tendant vers 0. Le plus naturel est d'essayer de majorer la série en normes, ce qui nous ramène à la définition suivante.

Définition II.3 (Convergence normale). *La série $\sum f_n$ converge normalement (sur A) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée, et si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.*

Remarque II.4. 1. *Autrement dit, la convergence normale correspond à la convergence absolue de la série dans $(\mathcal{B}(A,F), \|\cdot\|_\infty)$.*

2. *En pratique, la convergence uniforme, ou la convergence normale, seront souvent obtenues sur des sous-parties B adéquates, comme dans le cas des suites de fonctions. Ce sera en général suffisant pour obtenir les propriétés de continuité.*

Théorème II.5 (CVN implique CVU). *On suppose que les f_n sont bornées sur A. Alors si $\sum f_n$ converge normalement sur A, elle converge uniformément sur A.*

Éléments de preuve. Le reste de la série des normes est indépendant de x, tend vers 0, et majore $\|R_n(x)\|$. □

Remarque II.6. *Il suffit, pour utiliser ce théorème, que les f_n soient bornées à partir d'un certain rang n_0, et que $\sum_{n\geq n_0} f_n$ soit normalement convergente.*

Exemple II.7. 1. *Montrer que $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge uniformément sur $[-A, A]$, pour tout $A \in \mathbb{R}_+$.*

2. *Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{x^2+n^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.*

3. *Soit ζ la fonction de Riemann, définie par*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Montrer que ζ est définie sur $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 1\}$, et que la somme définissant ζ est uniformément convergente sur $D_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > a\}$, pour tout $a > 1$.

Méthode II.8 (Montrer qu'une CV n'est pas normale, ou pas uniforme). 1. *Pour montrer que $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur A,*

- *D'abord, regarder si les f_n sont bornées (au moins à partir d'un certain rang);*
- *si c'est le cas, trouver $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum \|f_n(x_n)\|$ diverge.*
- *On peut aussi calculer explicitement $\|f_n\|_\infty$ (c'est dans certains cas évident, dans d'autres, on peut faire une étude de fonctions) pour se ramener à une série numérique.*

2. *Pour montrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément, c'est un peu plus délicat.*

- *Trouver $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $(R_n(x_n))$ ne tend pas vers 0.*
- *On peut aussi contredire l'une des propriétés qui devrait être vérifiée en cas de CVU (par exemple la continuité de la somme).*

Exemple II.9. 1. *$\sum \frac{x^n}{n!}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.*

2. *$\sum \frac{x^n}{n}$ ne converge pas normalement sur $]-1, 1[$.*

3. *$\sum xe^{-nx}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, mais pas normalement.*

4. *Les trois séries précédentes ne sont pas non plus uniformément convergentes sur les intervalles donnés.*

5. *La somme définissant ζ n'est pas uniformément convergente sur $]1, +\infty[$.*

Exercice II.10. *On rappelle la définition de la fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$:*

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. *Donner le domaine de définition de ζ et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.*
2. *Prouver que ζ est continue sur son domaine de définition.*
3. *Déterminer $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s)$.*
4. *Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et tout $s > 1$, on a*

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$

   En déduire que $\zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1}$.
5. *Démontrer que ζ est convexe.*
6. *Tracer la courbe représentative de ζ.*

Remarque II.11. *La CVN n'est pas une condition nécessaire à la CVU. Une série peut converger uniformément sur un ensemble A sans y converger normalement. Nous donnons des exemples, après avoir donné des méthodes pour gérer cette situation.*

Méthode II.12 (Justifier une CVU sans CVN)**.**
1. *Majorer $R_n(x)$ par les moyens du bord (éventuellement voir des compensations entre des termes consécutifs).*
2. *Un cas particulier important est le cas des séries alternées : Si pour tout $x \in A$, $\sum f_n(x)$ est une série alternée, on est ramené à l'étude de la CVU de f_n vers 0.*
3. *Une autre méthode consiste à faire une transformation d'Abel, ce qui s'apparente à une intégration par parties discrète. Cela permet de gérer le cas de $\sum a_n(x)b_n(x)$, lorsque on connaît la CVU de $\sum b_n(x)$. En notant $R_n(x)$ le reste de cette série, on peut réécrire $b_n = R_{n-1} - R_n$, et réindexer de sorte à regrouper les R_n.*
4. *On fait aussi parfois des transformations d'Abel avec les sommes partielles en écrivant $b_n = B_n - B_{n-1}$. Cela peut être efficace lorsque les sommes partielles (B_n) sont (uniformément) bornées, sans être convergentes.*

Exemple II.13.
1. *Montrer que $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n}$ converge uniformément sur $[0,1]$, mais pas normalement.*
2. *Montrer que $\sum \cos(n)\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ est uniformément convergente sur $[0,1]$.*
3. *Montrer que $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ converge uniformément sur $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$.*

II.2 Régularité et interversions sur des sommes uniformes

On adapte dans cette section les résultats démontrés dans le cadre des suites. Dans la pratique en général, on tentera d'abord de démontrer la convergence normale sur des sous-parties adéquates de A, et sinon, on se ramènera aux études précédentes pour l'étude de la convergence uniforme.

Théorème II.14 (Continuité d'une somme infinie)**.** *Soit $\sum f_n$ une série uniformément convergente sur A. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A, alors $\sum f_n$ est continue sur A.*

Le théorème de la double limite s'adapte en un théorème d'interversion $\lim / \sum$.

Théorème II.15 (Passage à la limite sous $\sum$)**.** *Soit $\sum f_n$ une série uniformément convergente sur A et $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Soit $a \in \overline{A}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_n \in F$. Alors $\sum \ell_n$ converge, et f admet une limite en a, égale à*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

En d'autres termes,

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Exemple II.16. 1. *Déterminer* $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$.

2. *Déterminer* $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x)$.

Théorème II.17 (Intégration terme à terme sur un segment)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions* continues *d'un segment $I = [a, b]$ à valeurs dans un e.v.n. F de dimension finie.*

1. *Si $\sum f_n$ est uniformément convergente sur I, alors*

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)dt$$

converge uniformément sur I vers $x \mapsto \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt$.

2. *En particulier, si $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $[a, b]$,*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Exemple II.18. 1. *Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$,*

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}.$$

2. *À l'aide de l'exemple précédent, calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx$ (on intégrera d'abord sur $[0, c]$ avec $c \in]0, 1[$, puis on fera tendre c vers 1). On admettra que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.*

Théorème II.19 (Dérivation terme à terme)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions d'un intervalle I dans F, telles que :*

(i) les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I;