3. *Étudier la convergence uniforme sur $B(0,r)$ de la suite $(A(z)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $r\in]0,1[$, $p\geq 2$ est fixé et $A:\mathbb{C}\to\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est définie par*

$$A(z)=\begin{pmatrix} z & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & z & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & z & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & z\end{pmatrix}.$$

Proposition I.13 (Condition nécessaire de CVU)**.** *Supposons que (f_n) converge uniformément vers f sur A. Alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A^{\mathbb{N}}$, $f_n(x_n)-f(x_n)\to 0$.*

Méthode I.14 (Montrer qu'une suite ne converge pas uniformément)**.** *Utiliser la contraposée de la propriété précédente : pour montrer que (f_n) ne converge pas uniformément vers f, il suffit de trouver $(x_n)\in A^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(x_n)-f(x_n)$ ne converge pas vers 0.*

Exemple I.15. 1. *Reprendre les exemples précédents.*

2. *Étudier la CVU sur $\mathbb{R}$ de (f_n) définie par $f_n(x)=\cos\left(\frac{x}{n}\right)$.*

I.0.3 Convergence uniforme locale

Comme on le verra un peu plus loin, la convergence uniforme permet de conserver les propriétés de continuité. Comme la continuité n'est qu'une propriété locale, et non globale, il n'est pas nécessaire d'avoir la convergence uniforme sur tout le domaine, mais de l'avoir au voisinage de tout point en lequel on veut établir la continuité.

Définition I.16 (Convergence uniforme locale)**.** *Soit $a\in A$. On dit que (f_n) converge uniformément vers f au voisinage du point a s'il existe un voisinage $V\in\mathcal{V}(a)$ tel que (f_n) converge uniformément vers f sur $V\cap A$.*

Exemple I.17. *Montrer que les trois suites du premier exemple de ce chapitre sont uniformément convergentes au voisinage de tout point de $\mathbb{R}_+^*$, mais pas uniformément convergents sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Dans le cas d'une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on peut se contenter d'étudier la convergence uniforme sur tout segment inclus dans I.

Proposition I.18 (CVU sur un intervalle de $\mathbb{R}$)**.** *Soit $f_n:I\to F$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *(f_n) converge uniformément au voisinage de tout point de I.*

(ii) *(f_n) converge uniformément sur tout segment $[a,b]\subset I$;*

(iii) *Il existe un recouvrement $I=\bigcup_{j\in J}[a_j,b_j]$ tel que (f_n) converge uniformément sur chaque segment $[a_j,b_j]$.*

Dans la pratique, on étudiera par exemple souvent la convergence uniforme locale sur $\mathbb{R}_+^*$ en étudiant la convergence uniforme sur $]0,b]$ (s'il y a un problème d'uniformité en $+\infty$) ou sur $[a,+\infty[$, s'il y a un problème d'uniformité lorsqu'on s'approche de 0, ou sur $[a,b]$, s'il y a des problèmes des deux côtés.

I.1 Régularité des limites de suites de fonctions

Cette section traite essentiellement du passage à la limite d'un certain nombre de propriétés et constructions : la continuité, l'intégration, la dérivation. Ces propriétés et constructions s'expriment ou se définissent toutes en fonction de limites (ou bornes supérieures). Dans tous les cas, il s'agit donc ici d'établir un certain nombre de propriétés d'interversion de limites.

I.1.1 Continuité d'une limite uniforme

Théorème I.19 (Préservation de la continuité par CVU). *Soit (f_n) une suite de fonctions $A \to F$.*

1. *Soit $a \in A$. Si (f_n) converge uniformément vers f au voisinage de a, et si les (f_n) sont continues en a, alors f est continue en a.*
2. *Soit B un ouvert relatif de A. Si (f_n) converge uniformément vers f sur B et si les f_n sont continues sur B, alors f est continue sur B.*
3. *En particulier si (f_n) converge uniformément vers f (sur A entier) et si les f_n sont continues, alors f est continue (sur A).*

Éléments de preuve. Le premier point implique facilement les deux autres. Pour montrer 1, poser un ε et décomposer

$$f(x) - f(a) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a),$$

sur une boule sur laquelle exploiter la convergence uniforme. □

Exemple I.20 (Fonction de Bolzano). *On considère la suite (f_n) de fonctions $[0,1] \to \mathbb{R}$ affines par morceaux, définie par $f_0 = \mathrm{id}_{[0,1]}$, et, f_n étant définie continue, affine sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$, on définit f_{n+1} continue et affine sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{3^{n+1}}, \frac{k+1}{3^{n+1}}\right]$, prenant les mêmes valeurs que f_n sur les $\frac{3k}{3^{n+1}}$, et telle que*

$$f_{n+1}\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}\right) = f_n\left(\frac{3k+2}{3^{n+1}}\right)$$

et

$$f_{n+1}\left(\frac{3k+2}{3^{n+1}}\right) = f_n\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}\right).$$

Montrer que (f_n) converge vers une fonction f et que f est continue.
En représentant les fonctions (f_n), on se doute bien que les irrégularités de plus en plus nombreuses vont être un frein à la dérivabilité. De fait, on peut montrer que f est une fonction continue sur $[0,1]$, mais dérivable en aucun point de $[0,1]$. C'est historiquement le premier exemple d'une fonction continue nulle part dérivable, découvert par Bolzano vers 1830.

Remarque I.21. *Si la propriété de CVU ne porte pas sur A tout entier, attention à l'hypothèse d'ouverture. En particulier, si on travaille dans $\mathbb{R}$, et que A et B sont des intervalles, il faut faire attention aux bornes.*

Exemple I.22. *La suite définie par*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\frac{1}{n} \\ nx+1 & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{n}, 0\right] \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est uniformément convergente sur $[0, +\infty[$, et les f_n sont toutes continues sur cet intervalle. Pourtant, la limite simple sur $\mathbb{R}$, à savoir $\not\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$, n'est pas continue en 0.
On doit se ramener à une convergence uniforme sur un ouvert (relatif, mais ici, $A = \mathbb{R}$ tout entier donc c'est la même chose). Donc tout ce qu'on peut obtenir ici, c'est la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$, qui est bien vérifiée.

Méthode I.23 (Étudier la continuité d'une limite). *Pour étudier la continuité d'une limite d'une suite de fonctions définies sur A, on étudiera d'abord la CVU sur A. S'il n'y a pas CVU sur A, on pourra s'intéresser à la CV locale, en décomposant A comme union d'ouverts relatifs, ou en se ramenant à des segments si A est un intervalle réel.*

I.1.2 Double-limite

La propriété de continuité correspond à une interversion $\lim_{x\to a} / \lim_{n\to+\infty}$: Si (f_n) CVU au voisinage de $a \in A$ en lequel les f_n sont tous continus, alors

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

On peut se demander si une telle propriété subsiste au bord du domaine, lorsque $a \in \overline{A} \setminus A$. Cela reste valide, mais un peu plus délicat, car la valeur de la double-limite est un peu moins accessible.

Théorème I.24 (Théorème de la double-limite)**.** *Soit $f_n : A \to F$ convergeant uniformément vers f sur A, et $a \in \overline{A}$ (éventuellement infini si $E = \mathbb{R}$). On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_n$. Alors (ℓ_n) admet une limite $\ell \in F$, et*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$

Éléments de preuve. La démonstration est hors-programme. Le point délicat est de prouver la convergence de (ℓ_n), car une fois celle-ci acquise, on peut se ramener au théorème de continuité par prolongement. On peut en fait assez facilement montrer d'abord que (ℓ_n) est bornée (en commençant par majorer $\|f_n - f_m\|_\infty$, pour un n_0 convenable), pour trouver une valeur d'adhérence, puis par ε, montrer que $f(x) \longrightarrow \ell$. La convergence de la suite (ℓ_n) s'en déduit par une propriété d'unicité de la limite de f, amenant l'unicité de la valeur d'adhérence de (ℓ_n). □

Ainsi, l'existence de limites (finies) ℓ_n pour tous les f_n assure l'existence d'une limite pour f, égale à la limite des ℓ_n. Ou encore, sous ces hypothèses :

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

C'est donc un théorème d'interversion de limites, comme le théorème de continuité.

Remarque I.25. *Sans hypothèse de CVU, une telle interversion peut être fausse, même si toutes les limites existent.*

Exemple I.26. *La suite définie par $f_n(x) = e^{-nx}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifie :*

$$\lim_{x\to 0^+}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = 1.$$

I.1.3 Interversion limite-intégrale

Nous savons déjà que la limite uniforme d'une suite de fonctions f_n continues sur un segment $[a, b]$ est continue, donc intégrable au sens de Riemann. On peut légitimement se demander si son intégrale est obtenue en passant les intégrales des f_n à la limite. Nous montrons dans un premier temps un résultat un peu plus fort.

Théorème I.27 (Primitivation d'une limite uniforme de fonctions continues)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions d'un segment $[a, b]$ dans un e.v.n. E de dimension finie. On suppose que :*

- *les f_n sont continues ;*
- *(f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.*

On définit la suite

$$F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)dt, \quad \textit{et} \quad F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt.$$

Alors (F_n) converge uniformément vers F sur $[a, b]$.

Éléments de preuve. Remarquer que

$$\left\| \int_a^b f_n(t) - f(t)dt \right\|_E \leq |b-a| \cdot \|f_n - f\|_\infty.$$

□

Corollaire I.28 (Interversion limite uniforme/intégrale). *Soit (f_n) une suite de fonctions d'un segment $[a,b]$ dans un e.v.n. E de dimension finie. On suppose que :*

- *les f_n sont continues ;*
- *(f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*

Alors, f est intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Éléments de preuve. Prendre la limite simple en $x = b$ dans le théorème précédent. □

Remarque I.29. *Ce théorème affirme donc que sous les hypothèses de continuité et de convergence uniforme, on peut intervertir la limite et $\int$, ou, en d'autres termes, « passer à la limite sous l'intégrale » :*

$$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Exemple I.30. *Soit f la fonction de Bolzano définie dans un exemple précédent. Calculer $\int_0^1 f(x)dx$.*

Remarque I.31.

- *L'hypothèse de convergence uniforme est importante.*
- *L'hypothèse de continuité est moins importante, le résultat restant vrai sous la seule hypothèse d'intégrabilité (mais l'intégrabilité de la limite est un peu plus délicate à démontrer).*

Exemple I.32. *Soit f_n définie sur $[0,1]$, pour $n \geq 1$, par*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right] \\ n - n^2 x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Comparer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt$ et $\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt$.

Remarque I.33. *Le théorème d'interversion limite/intégrale en cas de convergence uniforme peut être vu comme un cas particulier assez simple du théorème de convergence dominée, appliqué sur un segment à la suite $(f_n - f)$, dominée à partir d'un certain rang par une fonction constante, intégrable sur un segment.*

I.1.4 Dérivabilité et dérivée d'une limite uniforme

Comme pour la continuité, la dérivabilité d'une limite de suite de fonctions (f_n) dérivables n'est pas nécessairement dérivable. Elle peut aussi être dérivable, mais de dérivée différente de la limite (simple) de la suite (f_n') des fonctions dérivées.

Exemple I.34. *1. Soit f_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ sur $[0,1]$ par*

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{1+\frac{1}{n}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que (f_n) converge uniformément vers une fonction f à déterminer. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $[0,1]$, mais pas f.

2. Soit f_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$.

Montrer que (f_n) converge uniformément vers une limite f, dérivable, mais que (f_n') ne converge pas vers f' sur $[0,1]$.

Ainsi, même une hypothèse de convergence uniforme, portant sur la suite (f_n), n'est pas suffisante. De fait, il faut bien une hypothèse de convergence uniforme pour pouvoir intervertir limite et dérivation, mais elle doit porter sur la suite des dérivées.

Théorème I.35 (Dérivation d'une suite de fonctions)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions définies d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans un e.v.n. F de dimension finie. On suppose que :*

(i) les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I;

(ii) la suite (f_n) converge simplement vers f;

(iii) la suite (f_n') converge uniformément sur I vers une application $g : I \to F$.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = g(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x).$$

L'hypothèse (iii) peut être remplacée par :

(iii') la suite (f_n') converge uniformément sur tout segment inclus dans I.

Éléments de preuve. Appliquer le théorème de primitivation à la suite (f_n'), pour comparer f et $x \mapsto f(a) + \int_a^x g(t)dt$. □

Par récurrence, on obtient facilement la version pour la classe $\mathcal{C}^p$.

Théorème I.36 (Classe $\mathcal{C}^p$ d'une limite)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions définies d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans un e.v.n. F de dimension finie, et $p \in \mathbb{N}$. On suppose que :*

(i) les f_n sont de classe $\mathcal{C}^p$ sur I;

(ii) pour tout $k \in [0, p-1]$ la suite $(f_n^{(k)})$ converge simplement ;

(iii) la suite $(f_n^{(p)})$ converge uniformément sur I.

Alors la limite simple f de la suite (f_n) est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I, et pour tout $x \in I$, et tout $k \in [0,p]$,

$$f^{(k)}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(k)}(x).$$

L'hypothèse (iii) peut être remplacée par :

(iii') la suite $(f_n^{(p)})$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I.

Exercice I.37. *Soit $I = [a,b]$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que (f_n) converge simplement vers f sur I. On suppose aussi que chaque fonction f_n est croissante, et que f est continue. On fixe $\varepsilon > 0$.*

1. *Justifier l'existence de $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in [a, b]$,*
$$|x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
2. *Soit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ une subdivision de $[a, b]$ avec $x_{i+1} - x_i < \eta$ pour tout $i = 0, \ldots, p-1$. Démontrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$ et tout $i \in \{0, \ldots, p\}$,*
$$|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon.$$
3. *Soit $y \in I$ et soit $i \in \{0, \ldots, p\}$ tel que $y \in [x_i, x_{i+1}]$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$$f(x_i) - f_n(x_{i+1}) \leq f(y) - f_n(y) \leq f(x_{i+1}) - f_n(x_i).$$
4. *En déduire que (f_n) converge uniformément vers f sur I.*

II. Séries de fonctions

Le but de cette section est d'adapter les résultats obtenus pour les suites de fonctions au cas des séries de fonctions. Comme dans le cas numérique, on peut obtenir certains critères de convergence simple ou uniforme ne nécessitant pas de connaître la limite. Cela donne une bien meilleure efficacité que le point de vue des suites.
On pourra en bénéficier pour l'étude des suites de fonctions, puisque, comme dans le cas numérique, l'étude d'une limite de suite de fonctions (f_n) se ramène à l'étude de la série télescopique $\sum(f_n - f_{n-1})$.

II.1 Modes de convergence

On se donne E un espace vectoriel de dimension finie, F un e.v.n. de dimension finie, et A une partie de E, ainsi qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de A dans F.
On note, pour tout $x \in A$, et tout $n \in \mathbb{N}$,
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$
les sommes partielles de la série $\sum f_n$. Soit également $B \subset A$.

Définition II.1 (Convergence simple, convergence uniforme).
- *La série $\sum f_n$ converge simplement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.*
- *La série $\sum f_n$ converge uniformément sur B si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur B.*

En cas de convergence simple sur B, on notera dans la suite du chapitre
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in B, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$
les restes de la série $\sum f_n$.

Proposition II.2 (Caractérisation de la CVU par le reste). *On suppose que $\sum f_n$ converge simplement sur B. Alors $\sum f_n$ converge uniformément sur B si et seulement si R_n converge uniformément vers 0 sur B.*

Il suffit donc de majorer $R_n(x)$ par une suite indépendante de x, et tendant vers 0. Le plus naturel est d'essayer de majorer la série en normes, ce qui nous ramène à la définition suivante.