Dans ce chapitre, on étudie les suites et séries de fonctions. De façon naturelle, on peut définir, si elle existe, la valeur point par point (c'est-à-dire la limite de $f_n(x)$) à x fixé, pour une suite (f_n). On peut alors se poser la question de savoir si certaines propriétés des suites f_n passent bien à la limite (par exemple la continuité, la dérivabilité etc) et si cela revient au même de faire certaines opérations terme à terme ou sur la somme totale, par exemple si la somme des intégrales est égale à l'intégrale de la somme (ou de même pour les limites). Il s'agit donc de propriété d'interversion de certains symboles, définis à base de limites. En général ces interversions ne seront pas possibles et il faudra des modes de convergence plus contraignants.

I. Modes de convergences

I.0.1 Convergence simple

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. On munit F de sa topologie naturelle d'e.v.n., associée à une norme quelconque $\|\cdot\|_F$. Soit $A \subset E$. On considère une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A dans F.
Dans certains énoncés, E devra également être muni de sa structure topologique naturelle d'e.v.n., notamment quand il sera question de continuité. Nous noterons dans ce cas $\|\cdot\|_E$ une norme (arbitrairement choisie) de E.
Comme on est en dimension finie, le choix des normes sur E et F n'a pas d'influence sur les propriétés de convergence et de continuité.

Définition I.1 (Convergence simple)**.** *La suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : A \to F$ si pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Autrement dit :*

$$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_x \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_x \implies \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

Proposition I.2 (Unicité de la limite simple)**.** *En cas d'existence, la fonction f est unique.*

Remarque I.3.
1. *La propriété de convergence simple, ainsi que la valeur de la limite simple f, ne dépend pas de la norme sur F.*
2. *L'espace E n'a pas besoin d'être muni d'une norme pour définir la convergence simple.*
3. *Les règles usuelles sur les limites de suites à valeurs dans F s'appliquent (sommes, produits si pertinent etc). Par exemple, si (f_n) et (g_n) admettent des limites simples f et g, alors $(f_n + \lambda g_n)$ converge simplement vers $f + \lambda g$.*
4. *L'indice x pour désigner le rang N_x dans la définition est indiqué pour insister sur la dépendance de N par rapport à x (il dépend aussi de ε, mais ce point est plus « évident », alors que la dépendance ou non par rapport à x est justement la subtilité qui différencie la convergence simple de la convergence uniforme).*

Exemple I.4. *Étudier la convergence simple de la suite (f_n) où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est définie par :*

1. $f_n(x) = e^{-nx}$;
2. $f_n(x) = nxe^{-nx}$;
3. $f_n(x) = ne^{-nx}$.

Remarque I.5. *Comme on l'a fait remarquer dans le préambule, certaines propriétés ne se conservent pas. Ici, dans le premier cas ($f_n(x) = e^{-nx}$), la continuité des f_n n'est par exemple pas préservée au passage à la limite simple f. Il faut, pour que ce soit le cas, un mode de convergence plus fort.*

I.0.2 Convergence uniforme

Définition I.6 (Convergence uniforme). 1. *On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (sur A) si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

2. *Soit $B \subset A$. On dit que (f_n) converge uniformément sur B si $((f_n)_{|B})$ converge uniformément, donc si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in B, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

Remarque I.7. 1. *La différence essentielle avec la convergence simple est l'indépendance de N par rapport à x. La convergence est donc « aussi rapide » en chaque point.*

2. *Graphiquement, pour des fonctions réelles, cela signifie qu'à partir d'un certain rang, la courbe de f_n est dans un « tube » de rayon ε autour de la courbe de f.*

3. *La quantité $\|f_n - f\|_\infty$ étant bien définie dans $\mathbb{R}$ (égale à $+\infty$ si $f - f_n$ n'est pas bornée), la définition peut se réexprimer de la façon suivante :*

$$\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Proposition I.8 (CVU par majoration uniforme). *S'il existe une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (indépendante de x) telle que pour tout $x \in A$,*

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq M_n,$$

et telle que $\lim M_n = 0$, alors (f_n) converge uniformément vers f.

Proposition I.9 (Limite simple / limite uniforme). *Si f_n converge uniformément vers f, alors elle converge aussi simplement vers f.*
Ainsi, la limite uniforme, si elle existe, est égale à la limite simple.

Proposition I.10 (Caractérisation de la CVU par convergence dans un e.v.n.). *Soit $f_n, f : A \to F$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *(f_n) converge uniformément vers f sur A.*

(ii) *$(f_n - f)$ est bornée à partir d'un certain rang n_0, et $(f_n - f)_{n\geq n_0}$ converge vers 0 dans $\mathcal{B}(A, F)$.*

Méthode I.11 (Étudier la convergence uniforme).
- *Étudier la limite simple pour trouver le seul candidat f à être la limite uniforme.*
- *Majorer $\|f_n(x) - f(x)\|$ indépendamment de x par une suite numérique qui tend vers 0.*

Exemple I.12. 1. *Parmi les exemples précédents, y en a-t-il qui CVU sur $\mathbb{R}_+$? sur $[a, +\infty[$, $a > 0$?*

2. *Étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ des suites définies par :*

$$f_n(x) = e^{-(x+n)^2}, \quad g_n(x) = e^{-(x+\frac{1}{n})^2}.$$

3. *Étudier la convergence uniforme sur $B(0,r)$ de la suite $(A(z)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $r\in]0,1[$, $p\geq 2$ est fixé et $A:\mathbb{C}\to\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est définie par*

$$A(z)=\begin{pmatrix} z & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & z & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & z & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & z\end{pmatrix}.$$

Proposition I.13 (Condition nécessaire de CVU)**.** *Supposons que (f_n) converge uniformément vers f sur A. Alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A^{\mathbb{N}}$, $f_n(x_n)-f(x_n)\to 0$.*

Méthode I.14 (Montrer qu'une suite ne converge pas uniformément)**.** *Utiliser la contraposée de la propriété précédente : pour montrer que (f_n) ne converge pas uniformément vers f, il suffit de trouver $(x_n)\in A^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(x_n)-f(x_n)$ ne converge pas vers 0.*

Exemple I.15. 1. *Reprendre les exemples précédents.*

2. *Étudier la CVU sur $\mathbb{R}$ de (f_n) définie par $f_n(x)=\cos\left(\frac{x}{n}\right)$.*

I.0.3 Convergence uniforme locale

Comme on le verra un peu plus loin, la convergence uniforme permet de conserver les propriétés de continuité. Comme la continuité n'est qu'une propriété locale, et non globale, il n'est pas nécessaire d'avoir la convergence uniforme sur tout le domaine, mais de l'avoir au voisinage de tout point en lequel on veut établir la continuité.

Définition I.16 (Convergence uniforme locale)**.** *Soit $a\in A$. On dit que (f_n) converge uniformément vers f au voisinage du point a s'il existe un voisinage $V\in\mathcal{V}(a)$ tel que (f_n) converge uniformément vers f sur $V\cap A$.*

Exemple I.17. *Montrer que les trois suites du premier exemple de ce chapitre sont uniformément convergentes au voisinage de tout point de $\mathbb{R}_+^*$, mais pas uniformément convergents sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Dans le cas d'une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on peut se contenter d'étudier la convergence uniforme sur tout segment inclus dans I.

Proposition I.18 (CVU sur un intervalle de $\mathbb{R}$)**.** *Soit $f_n:I\to F$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *(f_n) converge uniformément au voisinage de tout point de I.*

(ii) *(f_n) converge uniformément sur tout segment $[a,b]\subset I$;*

(iii) *Il existe un recouvrement $I=\bigcup_{j\in J}[a_j,b_j]$ tel que (f_n) converge uniformément sur chaque segment $[a_j,b_j]$.*

Dans la pratique, on étudiera par exemple souvent la convergence uniforme locale sur $\mathbb{R}_+^*$ en étudiant la convergence uniforme sur $]0,b]$ (s'il y a un problème d'uniformité en $+\infty$) ou sur $[a,+\infty[$, s'il y a un problème d'uniformité lorsqu'on s'approche de 0, ou sur $[a,b]$, s'il y a des problèmes des deux côtés.

I.1 Régularité des limites de suites de fonctions

Cette section traite essentiellement du passage à la limite d'un certain nombre de propriétés et constructions : la continuité, l'intégration, la dérivation. Ces propriétés et constructions s'expriment ou se définissent toutes en fonction de limites (ou bornes supérieures). Dans tous les cas, il s'agit donc ici d'établir un certain nombre de propriétés d'interversion de limites.