Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique • Mathématiques

Cardinaux et dénombrabilité

Mouad El Assadi

Professeur agrégé de mathématiques

Ingénieur d'État en génie civil — École Hassania des Travaux Publics (EHTP)

elassadimouad1@gmail.com

Table des matières

1 Rappels sur les cardinaux finis **2**
1.1 Ensembles finis, cardinaux 2
1.2 Rappel des propriétés calculatoires sur les cardinaux 2
1.3 Grands principes combinatories 3

2 Dénombrabilité **6**
2.1 Cardinaux infinis 6
2.2 Dénombrabilité 6
2.3 Règles opératoires sur les ensembles dénombrables 7
2.4 Des ensembles infinis non dénombrables 8

Introduction

Nous faisons dans ce chapitre quelques rappels sur les cardinaux finis, et leur utilisation dans des questions de dénombrement. Dans un second temps, nous quittons les révisions pour aborder le problème des cardinaux infinis, beaucoup moins intuitif, l'objectif étant l'étude des ensembles de même cardinal que $\mathbb{N}$, qu'on appelle ensembles dénombrables.

1. Rappels sur les cardinaux finis

1.1 Ensembles finis, cardinaux

Définition 1.1 (Cardinal d'un ensemble fini)**.** *Soit E un ensemble.*

- *On dit que E est un ensemble fini s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection $[1, n] \to E$.*
- *L'entier n est alors unique, est appelé cardinal de E, et est noté $|E|$ ou $\mathrm{Card}(E)$ ou $\sharp E$.*

Éléments de preuve. L'unicité de n provient du fait qu'il ne peut pas exister de bijection de $[1, n]$ dans $[1, m]$ si $n \neq m$, ce qui n'est pas si évident que cela à montrer si on ne dispose d'aucun outil de cardinalité. Cela peut se faire en montrant par récurrence sur n que si $m \neq n$ et $f : [1, n] \to [1, m]$, alors f n'est ni injective ni surjective. Pour passer de n à $n + 1$, considérer $f(n + 1)$. Quitte à composer par une transposition bijective, on peut considérer que $f(n + 1) = m + 1$, ce qui permet d'enlever n d'un côté, m de l'autre (avec une discussion à faire), pour se ramener à l'hypothèse de récurrence. □

Lemme 1.2 (Finitude des sous-ensembles)**.** *Tout sous-ensemble F de $[1, n]$ peut être mis en bijection avec un ensemble $[1, m]$, avec $m \leq n$.*

Éléments de preuve. On peut ranger les éléments de F dans l'ordre : $F = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_m\}$. □

Proposition 1.3 (Sous-ensemble d'un ensemble fini)**.** *Soit F un sous-ensemble de E. Si E est fini, alors F aussi.*

Éléments de preuve. Restreindre et corestreindre une bijection $E \to [1, n]$ et utiliser le lemme. □

1.2 Rappel des propriétés calculatoires sur les cardinaux

Lemme 1.4 (Réexpression du cardinal)**.** *Soit E un ensemble fini, et A un sous-ensemble de E. Alors*

$$|A| = \sum_{k \in E} \mathbb{I}_A(k).$$

Éléments de preuve. C'est évident intuitivement. Pour une bonne formalisation, par une bijection, on peut se ramener au cas où $A = [1, p]$ et $E = [1, n]$. □

Proposition 1.5 (Cardinal d'une union disjointe)**.** *Soit $A, B, A_1, \ldots, A_n$ des ensembles finis.*

1. *Si $A \cap B = \emptyset$, alors $|A \cup B| = |A| + |B|$.*
2. *Plus généralement, si pour tout $(i,j) \in [1,n]^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, alors*

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

Éléments de preuve. Le point 2 s'obtient du point 1 par récurrence. Le point 1 résulte du lemme et des propriétés des sommes. □

Proposition 1.6 (Cardinal d'un complémentaire). *Si $A \subset B$, alors $|\mathcal{C}_B A| = |B| - |A|$.*

Éléments de preuve. Écrire l'un des trois ensembles en jeu comme union disjointe des deux autres. □

Corollaire 1.7 (Cardinal d'un sous-ensemble). *Si $A \subset B$, alors $|A| \leq |B|$, avec égalité si et seulement si $A = B$.*

Éléments de preuve. Quel est le cardinal de $\mathcal{C}_B A$ lorsqu'on est dans le cas d'égalité ? □

Proposition 1.8 (Cardinal d'une union quelconque). *Soit A et B des ensembles finis. On a :*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Éléments de preuve. On peut décomposer en $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$. □

Proposition 1.9 (Cardinal d'un produit cartésian).
1. *Soit A et B deux ensembles finis. Alors $|A \times B| = |A| \times |B|$.*
2. *Plus généralement, soit $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles finis. Alors*

$$|A_1 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Éléments de preuve. Le point 2 s'obtient du 1 par récurrence. Pour le point 1, découper en tranche, ou utiliser une bijection de $[0, nm-1]$ dans $[0, n-1] \times [0, m-1]$ définie par une opération arithmétique classique. □

1.3 Grands principes combinatories

Proposition 1.10 (Injectivité, surjectivité, bijectivité et cardinal). *Soit E et F deux ensembles finis, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors :*

1. *Si f est bijective, $Card(E) = Card(F)$.*
2. *Si f est injective, $Card(E) \leq Card(F)$.*
3. *Si f est surjective, $Card(E) \geq Card(F)$.*

Éléments de preuve. Restreindre ou corestreindre de façon adéquate, de sorte à se ramener à une bijection. □

Méthode 1.11 (Combinatoire bijective)**.** *Pour dénombrer un ensemble fini E (c'est-à-dire pour déterminer son cardinal), une méthode classique consiste à le mettre en bijection avec un ensemble dont le cardinal est connu.*

Exemple 1.12. *Par définition des coefficients binoniaux, le cardinal de $P_k([1,n])$ est $\binom{n}{k}$. En déduire le nombre de l'ensemble des chemins monotones de $(0,0)$ à (a,b) dans N^2, chaque pas étant de longueur 1, et se faisant vers la droite ou vers le haut.*

Méthode 1.13 (Tri, partitionnement, principe additif)**.** *Si on peut trier les objets de E en plusieurs paquets disjoints $E_1,\dots,E_n$ de cardinaux respectifs $a_1,\dots,a_n$, alors le cardinal de E est*

$$|E| = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Exemple 1.14. *Formule sommatoire, ou lemme de la chaussette :*

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}.$$

Méthode 1.15 (Choix successifs, principe multiplicatif)**.** *Dénombrer un ensemble se fait souvent en s'intéressant à la façon de construire un élément, en décomposant sa construction de façon élémentaire en plusieurs étapes. Si un élément se construit en 2 étapes, et que :*

- *la première étape peut se faire de a façons différentes ;*
- *pour chaque choix de première étapes, la deuxième étape peut se faire de b façons différentes (le nombre b ne dépendant pas de la première étape) ;*
- *toutes les constructions faites ainsi sont distinctes,*

alors le nombre total d'éléments est ab.

Éléments de preuve. Une formalisation passe par un partitionnement de l'ensemble E dénombré en

$$\bigcup_{k\in[1,a]} E_k$$

, où on a rangé les éléments à dénombrer dans des ensembles E_k, en les triant suivant le résultat de la première étape. La troisième hypothèse certifie que l'union est disjointe (ce qui est représenté par le signe + dans l'union), et la deuxième hypothèse assure que les E_k sont tous de cardinal b. Cette formalisation est équivalente au lemme du berger, stipulant que si $f : E \to F$ est une surjection telle que les images réciproques $f^{-1}((y))$ aient toutes même cardinal b, alors $|E| = b|F|$. □

Exemple 1.16. *Dénombrement des injections, cardinal de $\mathfrak{S}_n$.*

Remarque 1.17. *Les deux méthodes peuvent être combinées, par exemple un tri, et pour chaque part du tri, une succession de choix.*

Exemple 1.18. *Formule de Vandermonde :*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

Méthode 1.19 (Formalisation par couple, et lecture inverse)**.** *Une formalisation mathématique de deux choix successifs peut se faire sous forme d'un couple, en mettant E en bijection avec un ensemble F de couples (x, y) où x est le résultat du premier choix, y le résultat du deuxième choix. Il y a souvent des contraintes entre x et y (liés à la façon de procéder au second choix). Ces contraintes définissent une propriété satisfaite par x et y, qu'on note $P(x, y)$. Ainsi*

$$F = \{(x, y) \mid P(x, y)\}$$

Sous cette forme on peut voir que la contrainte peut souvent être retournée en lisant le couple dans l'autre sens : F est clairement en bijection avec

$$G = \{(y, x) \mid P(x, y)\}$$

Cela revient à intervertir le rôle des deux étapes, donc l'ordre dans lequel on effectue la construction.

Exemple 1.20. *La formule du capitaine, ou comité-président.*

Méthode 1.21 (Démonstration ou interprétation combinatoire d'une formule)**.**

- *Interpréter combinatornement une formule permet d'en avoir une compréhension intuitive et naturelle, qui aide à la retenir ou à la retrouver.*
- *Cela permet également éventuellement de la démontrer, comme la formule de Vandermonde ci-dessus.*
- *Pour démontrer ou interpréter combinatornement une formule, chercher un modèle adéquat, et dénombrer de deux façons différentes, par exemple de façon directe et en effectuant un tri, ou bien en effectuant des choix successifs dans des ordres différents etc.*

Exemple 1.22. *Interpréter combinatoriement la formule*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Méthode 1.23 (Signes, principe de l'interrupteur)**.**

- *Une formule combinatoire ne contient a priori que des termes positifs. Certaines formules contenant aussi des signes négatifs peuvent quand même se démontrer combinatoriement, en réarrageant l'égalité de sorte à passer les termes négatifs de l'autre côté. On a alors deux quantités à comparer, ce qu'on peut faire combinatoriement, par exemple en établissant des bijections.*
- *Une situation classique : des signes qui alternent devant une expression avec des coefficients binomiaux : il s'agit de comparer des ensembles ayant des cardinaux de parité différente pour cela, faire entrer ou sortir un élément (interrupteur qu'on allume ou éteint). On illustre cela dans l'exemple qui suit, qui est à peu près le plus simple du genre.*

Exemple 1.24. *Montrer combinatoriement que*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \text{ si } n > 0.$$

2. Dénombrabilité

2.1 Cardinaux infinis

Définition 2.1 (Ensembles de même cardinal)**.** *Soit E et F deux ensembles.*

- *On dit que E et F ont même cardinal s'il existe une bijection $f : E \to F$. On dit aussi que E est équipotent à F.*
- *On dit que E est subpotent à F (ou que le cardinal de E est strictement inférieur à celui de F) s'il existe une injection de E dans F.*

Remarque 2.2 (HP)**.**
- *On peut montrer que la relation de subpotence vérifie les propriétés d'une relation d'ordre sur les classes cardinales. L'antisymétrie provient d'un théorème classique dû à Cantor et Berstein, affirmant que s'il existe une injection $f : E \to F$, et une injection $g : F \to E$, alors il existe une bijection $E \to F$.*
- *Avec l'axiome du choix, on peut montrer que cette « relation d'ordre » est totale.*

Avertissement 2.3. *Deux ensembles vérifiant une inclusion stricte $E \subsetneq F$ peuvent être de même cardinal. Pourtant F contient strictement plus d'éléments que E.*

Exemple 2.4 (Hôtel de Hilbert)**.** *$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ tel que $f(n) = n + 1$ est une bijection. Donc $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ ont même cardinal.*

2.2 Dénombrabilité

Définition 2.5 (Ensemble dénombrable)**.** *Soit E un ensemble. On dit que :*

- *E est dénombrable s'il est de même cardinal que $\mathbb{N}$;*
- *au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.*

Ainsi, E est dénombrable si et seulement s'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to E$.

Proposition 2.6 (Dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$)**.** *Le produit cartésien $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.*

Éléments de preuve. Construire une bijection en diagonales. Ou bien utiliser une bijection classique entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}^*$, basée sur l'étude des facteurs pairs de la décomposition de n en produit de facteurs premiers. □

Lemme 2.7. *Tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable.*

Éléments de preuve. Considérer un sous-ensemble $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, non fini. Construire par récurrence une application injective de $[0, n]$ dans E, en rajoutant à chaque étape le minimum des éléments non encore utilisés. Cela définit une bijection $\mathbb{N} \to E$. □

Proposition 2.8 (Première caractérisation des ensembles au plus dénombrables)**.** *Un ensemble E est au plus dénombrable si et seulement s'il peut être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.*

Éléments de preuve. Un sens est évident par les définitions de la finitude ou de la dénombrabilité. L'autre provient du lemme. □

Lemme 2.9 (Inversibilité à gauche ou droite des injections et surjections)**.** *Soit $f : E \to F$.*

1. *Si f est injective, il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$, et g est alors surjective.*
2. *Si f est surjective, il existe $g : E \to F$ telle que $f \circ g = id_F$, et g est alors injective.*

Éléments de preuve. On construit g associant à y un antécédent de ses antécédents. Dans le premier cas, on n'a pas le choix quand on est dans l'image de f, et sinon, on définit g comme on veut. Dans le deuxième cas, on doit choisir parmi les antécédents de y. □

Remarque 2.10.
- *Ce sont en fait des équivalences.*
- *On utilise l'axiome du choix (qui affirme la possibilité de pouvoir faire simultanément une infinité de choix).*

Proposition 2.11 (Deuxième caractérisation des ensembles au plus dénombrables)**.** *Soit E un ensemble non vide. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *E est au plus dénombrable*

(ii) *il existe une fonction injective $f : E \to \mathbb{N}$.*

(iii) *il existe une fonction surjective $f : \mathbb{N} \to E$.*

Éléments de preuve.
- $(i) \implies (ii)$: considérer une bijection $E \to F \subset \mathbb{N}$, et composer par l'injection canonique.
- $(ii) \implies (iii)$: c'est l'inversibilité à gauche d'une injection
- $(iii) \implies (ii)$: c'est l'inversibilité à droite d'une surjection. Pourquoi l'axiome du choix n'est-il pas nécessaire ici ?
- $(ii) \implies (i)$: corestriction à l'image.

□

2.3 Règles opératoires sur les ensembles dénombrables

Proposition 2.12 (Construction d'ensembles dénombrables)**.**
1. *Si E et F sont au plus dénombrables, alors $E \times F$ est au plus dénombrable.*
2. *Plus généralement, un produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ d'un nombre fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. Si l'un d'eux est dénombrable et les autres non vides, alors le produit est dénombrable.*
3. *Une union d'un nombre au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. Si l'un des ensembles est dénombrable, l'union est dénombrable.*

Éléments de preuve.
1. Construire une surjection par composition : $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to E \times F$
2. Récurrence

3. Supposons les ensembles indexés sur I dénombrable. Construire une surjection

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to I \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} A_i.$$

□

Corollaire 2.13. *1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.*

2. L'ensemble $\mathbb{N}^k$ est dénombrable.

3. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est dénombrable.

Définition 2.14 (Support d'une famille de scalaires)**.** *Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes. Le support de a est l'ensemble*

$$J = \{i \in I \mid a_i \neq 0\}.$$

Proposition 2.15 (Support d'une famille sommable)**.** *Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes. Si a est sommable, alors le support de a est au plus dénombrable.*

Éléments de preuve. Se ramener au cas d'une famille réelle positive, en contrôlant le support de a en fonction de celui des parties positives et négatives de ses parties réelles et imaginaires. Dans le cas positif, exprimer le support en fonction des

$$I_\varepsilon = \{i \in I \mid a_i > \varepsilon.$$

Que peut-on dire du cardinal de I_ε ? □

2.4 Des ensembles infinis non dénombrables

Théorème 2.16 (Cardinal de $\mathbb{R}$, Cantor)**.** *L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est non dénombrable.*

Éléments de preuve. (Démonstration non exigible) Sinon, considérer une énumération $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de tous les réels, et considérer un y tel que le n-ième chiffre après la virgule de y soit distinct de 0, 9 et du n-ième chiffre de x_n. Le réel y peut-il être dans l'énumération ? Pourquoi prendre la précaution de prendre les chiffres distincts de 0 et 9 ? □

Théorème 2.17 (Cantor, HP)**.** *Soit X un ensemble infini. Alors Card$(X) <$ Card$(\mathcal{P}(X))$ (i.e. X est subpotent à $\mathcal{P}(X)$, mais pas équipotent).*

Éléments de preuve. S'il existe une surjection $f : X \to P(X)$, considérer $Y \subset X$ constitué des éléments x tels que $x \notin f(x)$, et obtenir une contradiction en considérant l'appartenance de c à Y, c étant un élément de X tel que $f(c) = Y$. □

Remarque 2.18. *En quoi le résultat précédent empêche-t-il l'existence d'un « ensemble des ensembles » ?*