Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique • Mathématiques

Séries numériques et vectorielles

Mouad El Assadi

Professeur agrégé de mathématiques

Ingénieur d'État en génie civil — École Hassania des Travaux Publics (EHTP)

elassadimouad1@gmail.com

Table des matières

1 Topologie réelle et complexe **2**
1.1 Intervalles 2
1.2 Voisinages 2

2 Convergence **3**
2.1 Convergence, réexpression topologique 3
2.2 Rappel des propriétés opératoires relatives à la convergence 4
2.3 Comportement des limites vis-à-vis des inégalités 5
2.4 Propriétés des suites monotones 5

3 Comparaisons asymptotiques **6**

4 Suites récurrentes **8**
4.1 Suites récurrentes linéaires 8
4.2 Suites récurrentes linéaires perturbées 9
4.3 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ 9

5 Rappels et compléments sur les séries numériques **10**
5.1 Convergences 10
5.2 Comparaisons séries-intégrales 11
5.3 Théorèmes de comparaison pour la convergence absolue 12
5.4 Semi-convergence 14
5.5 Techniques asymptotiques 14

6 Séries dans un e.v.n. **16**
6.1 Définitions et propriétés générales 16
6.2 Séries à valeurs dans un e.v.n. de dimension finie 17

Rappels sur les suites numériques

1. Topologie réelle et complexe

1.1 Intervalles

Définition 1.1 (Intervalle de $\mathbb{R}$)**.** *Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble convexe I de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire tel que :*

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a \leq x \leq b \implies x \in I.$$

On rappelle que la propriété de la borne supérieure permet de décrire tous les intervalles :

Théorème 1.2 (Inventaire des intervalles réels)**.** *Tout intervalle I de $\mathbb{R}$ est d'une des formes suivantes, pour certaines valeurs réelles a et b :*

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\},\ a \leq b$;
- $]a,b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\},\ a < b$;
- $[a,b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\},\ a < b$;
- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\},\ a < b$;
- $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x \geq a\}$;
- $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x > a\}$;
- $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq b\}$;
- $]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$;
- $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$;
- $\emptyset$.

Remarque 1.3.

1. *Cette propriété est spécifique à $\mathbb{R}$. Par exemple, elle est fausse dans $\mathbb{Q}$ (avec $a,b \in \mathbb{Q}$).*
2. *La définition et le théorème s'étendent à $\overline{\mathbb{R}}$. Puisque $+\infty$ et $-\infty$ sont des éléments particuliers de $\overline{\mathbb{R}}$, on a besoin de moins de cas pour décrire tous les intervalles : $[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$ et $]a,b[$, avec $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$. L'ensemble vide est par exemple obtenu en considérant $]0,0[$, alors que $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$ et $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,+\infty]$.*

1.2 Voisinages

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La notation $|z|$ désignera donc suivant le cas soit la valeur absolue dans $\mathbb{R}$, soit le module dans $\mathbb{C}$.

Définition 1.4 (Voisinage dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)**.** *Soit $a \in \mathbb{K}$, et $V \subset \mathbb{K}$. On dit que V est un voisinage de a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :*

$$\forall y \in \mathbb{K},\ |y - a| < \varepsilon \implies y \in V,$$

c'est-à-dire $B(a, \varepsilon) \subset V$, où $B(a, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{K} \,|\, |y - a| < \varepsilon\}$ (boule ouverte de centre a et de rayon ε).

On note $\mathcal{V}(a) \subset \mathcal{P}(\mathbb{K})$ l'ensemble des voisinages de a.

Définition 1.5 (Voisinage de $\pm\infty$ dans $\mathbb{R}$)**.** *Soit $V \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}})$.*

- *On dit que V est un voisinage de $+\infty$ si et seulement s'il existe b tel que $]b, +\infty] \subset V$.*
- *On dit que V est un voisinage de $a = -\infty$ si et seulement s'il existe b tel que $[-\infty, b[\subset V$.*

On note $\mathcal{V}(+\infty)$ et $\mathcal{V}(-\infty)$ l'ensemble des voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ respectivement.

Proposition 1.6 (Caractérisation des voisinages de $\mathbb{R}$)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $V \subset \mathbb{R}$. Alors $V \in \mathcal{V}(a)$ si et seulement s'il existe un intervalle ouvert I tel que*

$$a \in I \subset V.$$

Proposition 1.7 (Union et intersection de voisinages)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a \in \mathbb{C}$. Soit $I \neq \emptyset$, et $(V_i)_{i \in I}$ une famille de voisinages de a (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ selon le cas). Alors :*

1. *$\bigcup_{i \in I} V_i$ est un voisinage de a.*
2. *Si I est fini, $\bigcap_{i \in I} V_i$ est un voisinage de a.*

Exemple 1.8. *Donner un exemple de famille de voisinages de 0 dans $\mathbb{R}$ dont l'intersection n'est pas un voisinage de 0.*

Définition 1.9 (Propriété au voisinage de a)**.** *On dit qu'une propriété $\mathcal{P}(x)$ dépendant d'un élément $x \in \mathbb{K}$ est vérifiée au voisinage de a s'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que pour tout $x \in V$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.*

2. Convergence

2.1 Convergence, réexpression topologique

On rappelle les définitions suivantes :

Définition 2.1 (Limite d'une suite, convergence, divergence)**.**

- *Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{K}$ si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in B(\ell, \varepsilon).$$

- *Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{K}$, on dit qu'elle est convergente.*
- *Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet aucun ℓ de $\mathbb{K}$ comme limite, alors on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente (dans $\mathbb{K}$).*

Définition 2.2 (Limite infinie d'une suite réelle)**.** *Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelle.*

- (u_n) *admet la limite* $+\infty$ *si :*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ u_n \geqslant A.$$

- (u_n) *admet la limite* $-\infty$ *si :*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ u_n \leqslant A.$$

Théorème 2.3 (Unicité de la limite)**.** *Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. Si elle existe, la limite de (u_n) est unique.*

Proposition 2.4 (Caractérisation topologique de la limite)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $a \in \overline{\mathbb{K}}$ (ou éventuellement $a = \pm\infty$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).*

Alors les propositions suivantes sont équivalentes:

1. $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$
2. $\forall V \in \mathcal{V}(a),\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \in V.$

Proposition 2.5 (Suites convergentes à valeurs entières)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. La suite (u_n) est convergente si et seulement si elle est stationnaire (i.e. constante à partir d'un certain rang).*

2.2 Rappel des propriétés opératoires relatives à la convergence

Théorème 2.6 (Opérations sur les limites finies)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes convergentes, et λ et μ deux scalaires (réels ou complexes). Alors :*

1. $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente, et* $\lim |u_n| = |\lim u_n|$*;*
2. $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente, et* $\lim(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim u_n + \mu \lim v_n$*;*
3. $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente, et* $\lim(u_n v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$*;*
4. *si* $\lim v_n \neq 0$*, alors* $v_n \neq 0$ *à partir d'un certain rang ; ainsi,* $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ *est définie à partir d'un certain rang, est convergente, et* $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$.

Théorème 2.7 (Opérations impliquant des limites infinies)**.** *Dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites réelles, les résultats ci-dessus restent vrais si la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et/ou de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est infinie, avec les règles arithmétiques suivantes (règles usuelles dans $\overline{\mathbb{R}}$) :*

$$a + \infty = +\infty; \quad +\infty + \infty = +\infty; \quad a \cdot (+\infty) = (sg(a))\infty \quad (\text{pour } a \neq 0);$$

$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty; \quad \frac{1}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Remarque 2.8 (Formes indéterminées)**.** *En revanche, les opérations arithmétiques suivantes ne sont pas définies, et donnent des formes indéterminées :*

$$\infty - \infty; \quad 0 \cdot \infty; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \frac{0}{0}$$

Proposition 2.9 (Produit $0\times$borné)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.*

Proposition 2.10 (Passage à la limite pour les puissances). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, (u_n) étant de plus strictement positive. On suppose que $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$, et que $(\ell, \ell') \notin \{(+\infty, 0), (0, 0), (1, +\infty), (1, -\infty)\}$. Alors :*

$$u_n^{v_n} \to \ell^{\ell'}.$$

Remarque 2.11 (Formes indéterminées pour les puissances). *On notera les formes indéterminées relatives aux exponentiations :*

$$\infty^0, \quad 0^0 \quad \textit{et} \quad 1^\infty.$$

2.3 Comportement des limites vis-à-vis des inégalités

Théorème 2.12 (Conservation des inégalités larges). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, et $N \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geq N$, $u_n \leq v_n$. Alors, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent des limites dans $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$.*

Remarque 2.13. *Les inégalités strictes ne se conservent pas !*

Théorème 2.14 (Théorème de convergence par encadrement). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, trois suites réelles, et $N \in \mathbb{N}$, tels que : $\forall n \geq N$, $u_n \leq v_n \leq w_n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers une même limite finie, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi, et*

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n.$$

Théorème 2.15 (Théorème de divergence par minoration ou majoration). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.*
2. *Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.*

Remarque 2.16 (Comparaison à une suite géométrique).

- *Étudier l'existence et le cas échéant la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.*
- *En cas d'existence, notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$.*
  - *Si $\ell < 1$, on peut majorer à partir d'un certain rang $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une suite géométrique de raison $r \in [\ell, 1[$, et on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.*
  - *Si $\ell > 1$, on peut minorer à partir d'un certain rang $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une suite géométrique de raison $r \in]1, \ell]$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.*
  - *Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.*

2.4 Propriétés des suites monotones

Théorème 2.17 (Théorème de la convergence monotone). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.*
3. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.*

4. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et non minorée, alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $-\infty$.

De plus, dans le cas croissant, on a alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Définition 2.18 (Suites adjacentes). *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes si et seulement si :*

1. *l'une est croissante et l'autre décroissante ;*
2. $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers 0.*

Théorème 2.19 (Théorème des suites adjacentes). *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles adjacentes. Alors :*

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent, et* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$,
2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \ell| \leq |v_n - u_n|$.

3. Comparaisons asymptotiques

Définition 3.1 (Domination). *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. $\exists M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq M|v_n|$
2. *il existe une suite* (μ_n) *et* $n_0 \in \mathbb{N}$ *telle que pour tout* $n \geq n_0$, $u_n = \mu_n v_n$, *et* (μ_n) *est bornée.*

Si ces propriétés sont satisfaites, on dit que (u_n) *est dominée par* (v_n), *et on note* $u_n = O(v_n)$.

Définition 3.2 (Négligeabilité). *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq \epsilon|v_n|$;
2. *il existe une suite* $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et un entier* n_0 *tels que :*

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = \epsilon_n v_n \quad \textit{et} \quad \lim \epsilon_n = 0.$$

Si ces propriétés sont satisfaites, on dit que (u_n) *est négligeable devant* (v_n), *et on note* $u_n = o(v_n)$.

Définition 3.3 (Équivalence). *Deux suites réelles* (u_n) *et* (v_n) *sont dites équivalentes s'il existe une suite* (α_n) *et un entier* n_0 *tels que*

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = \alpha_n v_n \quad \textit{et} \quad \lim \alpha_n = 1.$$

On note $u_n \sim v_n$.

Proposition 3.4 (Caractérisation de l'équivalence par la négligeabilité).

$$u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n).$$

Remarque 3.5. *Si* (v_n) *ne s'annule pas à partir d'un certain rang, ces propriétés peuvent être caractérisées par l'étude de* $\frac{u_n}{v_n}$ *:*

- $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ *bornée* $\iff u_n = O(v_n)$*;*
- $\frac{u_n}{v_n} \to 0 \iff u_n = o(v_n)$*;*
- $\frac{u_n}{v_n} \to 1 \iff u_n \sim v_n$.

Proposition 3.6 (Transitivités strictes et larges de o et O)**.** 1. *Si* $u_n = O(v_n)$ *et* $v_n = O(w_n)$*, alors* $u_n = O(w_n)$.

2. *Si* $u_n = o(v_n)$ *et* $v_n = o(w_n)$*, alors* $u_n = o(w_n)$.
3. *Si* $u_n = o(v_n)$ *et* $v_n = O(w_n)$*, alors* $u_n = o(w_n)$.
4. *Si* $u_n = O(v_n)$ *et* $v_n = o(w_n)$*, alors* $u_n = o(w_n)$.

Proposition 3.7 (Sommes de o et O)**.** 1. *Si* $u_n = o(w_n)$ *et* $v_n = o(w_n)$*, alors* $u_n + v_n = o(w_n)$.

2. *Si* $u_n = O(w_n)$ *et* $v_n = O(w_n)$*, alors* $u_n + v_n = O(w_n)$.
3. *Si* $u_n = o(w_n)$ *et* $v_n = O(w_n)$*, alors* $u_n + v_n = O(w_n)$.
4. *Si* $u_n = O(w_n)$ *et* $v_n = o(w_n)$*, alors* $u_n + v_n = O(w_n)$.

Proposition 3.8 (Produits de o et O)**.** 1. *Si* $u_n = o(w_n)$ *et* $v_n = o(x_n)$*, alors* $u_n v_n = o(w_n x_n)$.

2. *Si* $u_n = O(w_n)$ *et* $v_n = o(x_n)$*, alors* $u_n v_n = o(w_n x_n)$.
3. *Si* $u_n = o(w_n)$ *et* $v_n = O(x_n)$*, alors* $u_n v_n = o(w_n x_n)$.
4. *Si* $u_n = O(w_n)$ *et* $v_n = O(x_n)$*, alors* $u_n v_n = O(w_n x_n)$.
5. *En particulier,* $u_n = w_n o(x_n) \iff u_n = o(w_n x_n)$ *et* $u_n = w_n O(x_n) \iff u_n = O(w_n x_n)$.

Proposition 3.9 (Équivalents de produits, quotients, puissances)**.** *Soit* $(u_n), (v_n), (u'_n)$ *et* (v'_n) *quatre suites réelles.*

1. *Si* $u_n \sim u'_n$ *et* $v_n \sim v'_n$*, alors* $u_n v_n \sim u'_n v'_n$.
2. *Si de plus* v_n *est non nulle à partir d'un certain rang, alors* $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{u'_n}{v'_n}$.
3. *Si* $u_n \sim u'_n$ *et si* a *est un réel fixé, alors* $(u_n)^a \sim (u'_n)^a$.

Remarque 3.10. • *Ne pas sommer des équivalents (problème de compensation de la partie principale)*

- *Ne pas composer des équivalents par une fonction.*

Théorème 3.11 (Conservation des limites par équivalence)**.** *Si* $u_n \sim v_n$*, et si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ *dans* $\overline{\mathbb{R}}$*, alors* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, et sa limite est* ℓ.

Proposition 3.12 (Conservation du signe)**.** *Soit* (u_n) *et* (v_n) *deux suites équivalentes. Alors il existe* n_0 *tels que pour tout* $n \geq n_0$*,* u_n *et* v_n *soient de même signe.*

Proposition 3.13 (Équivalents classiques). 1. $\ln(1+x) \sim x$;

2. $e^x - 1 \sim x$;
3. $(1+x)^a - 1 \sim ax \quad (a \neq 0)$;
4. $\sin(x) \sim x$;
5. $\cos(x) - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$;
6. $\tan(x) \sim x$;
7. $sh(x) \sim x$;
8. $ch(x) - 1 \sim \frac{x^2}{2}$;
9. $th(x) \sim x$;
10. $Arcsin(x) \sim x$;
11. $Arctan(x) \sim x$;

Théorème 3.14 (Formule de Stirling). *On a :* $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

4. Suites récurrentes

4.1 Suites récurrentes linéaires

Définition 4.1 (Suites récurrentes linéaires). *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *On dit que* (u_n) *est une suite récurrente linéaire d'ordre* k *si* (u_n) *vérifie une relation du type :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+k} = a_{k-1,n}u_{n+k-1} + \cdots + a_{1,n}u_{n+1} + a_{0,n}u_n.$$

$$\text{où } ((a_{0,n}), \ldots, (a_{k-1,n})) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^k.$$

Théorème 4.2 (Structure et dimension de l'ensemble des SRL). *Soit, pour* $i \in [0, k-1]$, $(a_{i,n}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *On pose* $\mathcal{S}$ *l'ensemble des suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant la relation de récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+k} = a_{k-1,n}u_{n+k-1} + \cdots + a_{1,n}u_{n+1} + a_{0,n}u_n.$$

Alors $\mathcal{S}$ *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel, et l'application*

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{S} & \longrightarrow \mathbb{C}^k \\ (u_n) & \longmapsto (u_0, \ldots, u_{k-1}) \end{cases}$$

est un isomorphisme. En particulier, $\mathcal{S}$ *est de dimension* k.

Définition 4.3 (Polynôme caractéristique d'une récurrence linéaire). *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite récurrente linéaire à coefficients constants, de relation*

$$u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \cdots + a_1u_{n+1} + a_0u_n$$

Le polynôme caractéristique associé à la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est le polynôme*

$$\chi(X) = X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \cdots - a_1X - a_0.$$

Théorème 4.4 (Explicitation des SRL). *Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites (u_n) vérifiant une relation de récurrence linéaire dont le polynôme caractéristique est χ. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les racines de χ (dans $\mathbb{C}$), de multiplicité $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ respectivement. Alors $\mathcal{S}$ est l'ensemble des suites telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{i=1}^{p} P_i(n)\lambda_i^n,$$

où pour tout $i \in [1, p]$, $P_i \in \mathbb{C}_{\alpha_i - 1}[X]$.

4.2 Suites récurrentes linéaires perturbées

Théorème 4.5 (Structure de l'ensemble des SRL perturbées). *L'ensemble $\mathcal{S}$ des suites vérifiant la relation de récurrence*

$$(E) : \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+k} - \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,n} u_{n+i} = b_n$$

est un espace affine dirigé par l'espace $\mathcal{S}_H$ des suites vérifiant la relation homogène associée (EH). Ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une solution particulière, toute autre suite (v_n) vérifiant (E) vérifiera

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n + w_n, \quad (w_n) \in \mathcal{S}_H.$$

Proposition 4.6 (Explicitation d'une SRL perturbée par $P(n)\lambda^n$). *Soit (EH) une relation de récurrence linéaire à coefficients constants, de polynôme caractéristique χ, et (E) la relation correspondante, perturbée par $(b_n) = P(n)\lambda^n$. Alors il existe une solution particulière de (E) de la forme*

$$u_n = n^\alpha Q(n)\lambda^n,$$

où $\alpha = mult_\chi(\lambda)$ et $\deg(Q) \leq \deg(P)$.

4.3 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition 4.7 (Intervalle stable). *On dit qu'un intervalle I est stable par f si f est définie sur I (i.e. $I \subset D_f$) et $f(I) \subset I$.*

Théorème 4.8 (Condition suffisante pour que (u_n) soit bien définie). *Si I est un intervalle stable par f, et si $u_0 \in I$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.*

Proposition 4.9 (Étude des variations lorsque $f - \mathrm{id}$ est de signe constant). *Supposons $f - id$ de signe constant sur un intervalle stable I, et $u_0 \in I$. Alors (u_n) est monotone, de sens de monotonie déterminé par le signe de $f - id$.*

Proposition 4.10 (Étude des variations lorsque f est croissante). *Supposons f croissante sur un intervalle stable I, et $u_0 \in I$. Alors (u_n) est monotone. On trouve le sens de monotonie en comparant u_0 et u_1.*

Proposition 4.11 (Étude des variations lorsque f est décroissante). *Supposons f décroissante sur un intervalle stable I, et $u_0 \in I$. Alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens de monotonie opposé. On trouve les sens de monotonie en comparant u_0 et u_2.*

Proposition 4.12 (Vitesse de convergence en un point fixe attractif). *Soit f une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, et soit $a \in I$ un point fixe de f tel que $|f'(a)| < 1$.*

1. *Alors il existe ε tel que s'il existe n_0 tel que $|u_{n_0} - a| < \varepsilon$, alors $u_n \to a$. On dit que a est un point fixe attractif.*
2. *Si tel est le cas, on a alors, pour tout $k \in]|f'(a)|, 1[$, $u_n = O(k^n)$.*

Lemme 4.13 (Théorème de la moyenne de Cesáro, cas convergent)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe, et*

$$\forall n \geq 1, \quad M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

la suite de ses moyennes. Alors si (u_n) converge vers ℓ, (M_n) aussi.

5. Rappels et compléments sur les séries numériques

Toutes les séries de cette section sont à terme général dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle rapidement les définitions et propriétés principales.

5.1 Convergences

Définition 5.1 (Convergence d'une série)**.** *Soit (u_n) une suite de réels ou complexes.*

(i) Les sommes partielles S_n de la série de terme général u_n sont :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

(ii) On dit que la série $\sum u_n$ de terme général u_n converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles admet une limite finie.

(iii) On note alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Cette quantité est appelée somme *de la série de terme général u_n.*

(iv) Une série non convergente est dite divergente*.*

(v) Si $\sum u_n$ converge, on définit les restes de la série par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n.$$

Proposition 5.2 (Divergence grossière)**.** *Si (u_n) ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge. On dit que la divergence est grossière.*
Éléments de preuve. *Si la série converge, $u_n = S_n - S_{n-1}$ tend vers 0.*

Remarque 5.3 (Divergence non grossière)**.** *La réciproque est fausse. Autrement dit, il existe des divergences non grossières, comme la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$.*

Théorème 5.4 (Théorème de comparaison des séries à termes positifs, TCSTP)**.** *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est convergente.*
Éléments de preuve. *Sous ces hypothèses, la somme partielle de la série $\sum u_n$ est croissante, et majorée par $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.*

Définition 5.5 (Convergence absolue)**.** *On dit que $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge.*

Théorème 5.6 (CVA implique CV)**.** *Toute série (réelle ou complexe) absolument convergence est convergente.*
Éléments de preuve.

- *Pour le cas réel, utiliser le TCSTP avec $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$.*
- *Pour le cas complexe, utiliser le cas réel, et le TCSTP avec $0 \leq |\mathrm{Re}(u_n)| \leq |u_n|$ et $0 \leq |\mathrm{Im}(u_n)| \leq |u_n|$.*

Proposition 5.7 (Linéarité)**.** *Soit λ et μ deux complexes.*

1. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, et :*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
2. *Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.*
3. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien conclure sur $\sum u_n + v_n$.*

Éléments de preuve. *Combinaison de la propriété de linéarité des sommes finies et de la propriété de linéarité de la limite.*

5.2 Comparaisons séries-intégrales

Lemme 5.8 (Caractérisation discrète de la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)dt$, $f \geq 0$)**.** *Soit f une application positive, continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, et $n_0 \geq a$. L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si la série de terme général $\left(\int_n^{n+1} f(t)dt\right)_{n \geq n_0}$ converge.*
Éléments de preuve. *C'est bien sûr Chasles, d'abord. Puis la croissance de $x \mapsto \int_{n_0}^x f(t)dt$, qui assure l'existence d'une limite dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$.*

Théorème 5.9 (Théorème de comparaison entre série et intégrale)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante continue par morceaux et positive.*
Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $\sum_{n \geq a} f(n)$ *converge ;*

(ii) $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge ;*

(iii) f *est intégrable sur* $[a, +\infty[$.

Éléments de preuve. *Les points (ii) et (iii) sont équivalents par positivité de f.*

Pour l'équivalence entre (i) et (ii), encadrer sur un intervalle $[n, n+1]$ par décroissance de f :

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n),$$

puis utiliser le TCSTP et le lemme.

On en déduit notamment :

Théorème 5.10 (Nature des séries de Riemann)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Théorème 5.11 (Nature des séries de Bertrand)**.** *Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. La série de Bertrand $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ de paramètre (α, β) converge si et seulement si $\alpha > 1$, ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.*

Éléments de preuve. *On avait montré le théorème similaire pour les intégrales. Il faut juste s'assurer de la monotonie à partir d'un certain rang.*

Le cas général $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ s'obtient par comparaison.

Les techniques de comparaison entre séries et intégrales permettent en général d'obtenir mieux que juste la convergence ou la divergence d'une série. En effet, il s'agit d'un encadrement en général suffisamment fin de la série par deux intégrales pour obtenir une estimation (majoration, ou équivalent) de sommes partielles ou de restes. Il n'y a pas de résultat particulier à connaître, simplement une bonne maîtrise de ces techniques de comparaison. Pour citer le programme officiel : « Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes, ou des restes de séries convergentes, notamment dans le cas d'une fonction monotone. »

Nous voyons donc un certain nombre d'exemples, à bien étudier pour être en mesure de les adapter à d'autres situations.

Exemple 5.12.

1. *Trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha \leq 1$, de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha > 1$.*
2. *Déterminer un équivalent de*
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^2}$$
.
3. *Déterminer un équivalent de*
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}$$
.

5.3 Théorèmes de comparaison pour la convergence absolue

On dispose d'un certain nombre d'outils de comparaison, permettant d'obtenir la convergence d'une série en la comparant à une série de référence. Les séries de référence sont :

- Les séries géométriques $\sum a^n$, qui convergent ssi $|a| < 1$;

- Les séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, qui convergent ssi $\alpha > 1$;
- (HP) les séries de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$, qui convergent ssi $(\alpha, \beta) > (1, 1)$ pour l'ordre lexicographique.

Les comparaisons s'établissent en général dans le cadre des séries à termes positifs mais s'utilisent de fait souvent pour l'étude de la convergence absolue. Les énoncer dans ce contexte ne diminue pas la généralité, puisque pour une série à termes positifs, la convergence équivaut à la convergence absolue.

Théorème 5.13 (Théorème de comparaison des séries par $o, O, \sim$)**.** *Soit (u_n) et (v_n) des suites réelles ou complexes.*

1. *Si $u_n = O(v_n)$ (et a fortiori si $u_n = o(v_n)$), et si $\sum v_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge absolument.*
2. *Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ CVA si et seulement si $\sum v_n$ CVA.*

Éléments de preuve. *Un O se traduit par une inégalité à partir d'un certain rang sur les valeurs absolues, ce qui nous ramène au TCSTP. Un équivalent se réécrit avec o.*

Remarque 5.14. *La comparaison par équivalents permet de comparer la nature de séries de signe constant, ou la CVA, mais ne permet pas d'établir une semi-convergence, par exemple.*

Une façon commode de comparer à une série géométrique consiste à comparer asymptotiquement le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ au quotient similaire (constant égal à la raison) qu'on obtiendrait avec une série géométrique. Cela est à la base de la règle suivante :

Proposition 5.15 (Règle de d'Alembert)**.** *Soit $\sum u_n$ une série réelle ou complexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$ (ou au moins à partir d'un certain rang). On suppose que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \ell \in \mathbb{R}_+$.*

(i) Si $0 \leq \ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument.

(ii) Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

(iii) Le cas $\ell = 1$ est indéterminé.

Éléments de preuve.

(i) si $\ell < a < 1$, à partir d'un certain rang, $|u_n| \leq a^{n-n_0}|u_{n_0}|$.

(ii) à partir d'un certain rang, $|u_{n+1}| > |u_n|$, ce qui empêche la convergence vers 0 du terme général.

(iii) Considérer par exemple les séries de Riemann qui se placent toutes dans ce cas.

Remarque 5.16. *La règle de d'Alembert sera un outil important dans l'étude du domaine convergence des séries entières $\sum a_n x^n$. En effet si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell$, alors*

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| \to \ell|x|,$$

et la série va converger absolument si $|x| < \frac{1}{\ell}$ et diverger grossièrement si $|x| > \frac{1}{\ell}$ (dans $\mathbb{C}$). Ainsi, le domaine est un disque pouvant contenir (ou non) certains points de sa frontière. Le réel $\frac{1}{\ell}$ est appelé rayon de convergence de la série entière. On montrera que le domaine de convergence des séries entières est toujours de cette forme, même lorsque la règle de d'Alembert n'est pas applicable.

Exemple 5.17. *1. Rayon de convergence de la série exponentielle* $\sum \frac{z^n}{n!}$

2. Rayon de convergence de la série géométrique dérivée $\sum (n+1)x^n$

3. Rayon de convergence de la série du logarithme $\sum \frac{x^n}{n^s}$.

5.4 Semi-convergence

Définition 5.18 (Semi-convergence)**.** *Une série semi-convergente est une série convergente, mais pas absolument convergente.*

Le seul outil au programme est :

Théorème 5.19 (Critère spécial de convergence des séries alternées)**.** *Soit* (a_n) *une suite décroissante de limite nulle. Alors* $\sum (-1)^n a_n$ *est appelée série alternée, et est convergente.*
Éléments de preuve. *En notant* S_n *la somme partielle, montrer que* (S_{2n}) *et* (S_{2n+1}) *sont adjacentes.*

Remarque 5.20. *L'étude des séries* $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ *ou* $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ *est alors immédiate. On peut souvent s'y ramener par DL.*

Remarque 5.21. *Dans des situations d'agencements de signes plus complexes, une bonne idée consiste souvent à regrouper les termes consécutifs de même signe (faire des paquets), puis :*

- *vérifier que la somme sur chaque paquet ne tend pas vers 0, ce qui suffit à établir la divergence ;*
- *ou vérifier que la sommation par paquet se ramène à l'étude d'une série alternée. Il faut ensuite contrôler ce qui se passe entre les paquets, mais c'est assez « automatique » vu les propriétés de signes.*

5.5 Techniques asymptotiques

Pour commencer, on adapte au cas discret les théorèmes de sommation des relations de comparaison vus pour les intégrales.

Théorème 5.22 (Sommation des relations de comparaison)**.** *Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries numériques. On suppose que* $\sum v_n$ *est à termes réels de signe constant (au moins à partir d'un certain rang). On note* $S_n(u)$ *(resp.* $S_n(v)$*) les sommes partielles de* $\sum u_n$ *(resp. de* $\sum v_n$*), et en cas de convergence, on note*

$$R_n(u) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad (\text{resp. } R_n(v) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k)$$

les restes de la série $\sum u_n$ *(resp.* $\sum v_n$*).*

1. *Si* $\sum v_n$ *converge,*
   - *si* $u_n = O(v_n)$*, alors* $\sum u_n$ *converge, et* $R_n(u) = O(R_n(v))$*;*
   - *si* $u_n = o(v_n)$*, alors* $\sum u_n$ *converge, et* $R_n(u) = o(R_n(v))$*;*

- *si* $u_n \sim v_n$*, alors* $\sum u_n$ *converge, et* $R_n(u) \sim R_n(v)$*;*

2. *Si* $\sum v_n$ *diverge,*
   - *si* $u_n = O(v_n)$*, alors* $S_n(u) = O(S_n(v))$*;*
   - *si* $u_n = o(v_n)$*, alors* $S_n(u) = o(S_n(v))$*;*
   - *si* $u_n \sim v_n$*, alors* $S_n(u) \sim S_n(v)$*;*

Éléments de preuve. *La démonstration peut se faire exactement comme dans le cas des intégrales. On peut aussi se ramener au cas des comparaisons intégrales, en introduisant les fonctions* $f_u : x \mapsto u_{\lfloor x \rfloor}$ *et* $f_v : x \mapsto v_{\lfloor x \rfloor}$*.*

Corollaire 5.23 (Théorème de Cesàro)**.** *Soit* $u_n \to \ell \in \mathbb{C}$ *(ou* $\mathbb{R}$ *si* $u_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*). Alors la suite des moyennes a la même limite :*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \to \ell.$$

Éléments de preuve.

- *Si* ℓ *fini, écrire* $u_n - \ell = o(1)$ *et sommer.*
- *Si* $\ell = +\infty$*,* $1 = o(u_n)$ *et sommer. Adapter pour* $-\infty$*.*

On retrouve, avec une technique un peu allégée, les équivalents trouvés précédemment pour les séries de Riemann. Le résultat lui-même est HP, mais il est attendu qu'on sache le retrouver rapidement.

Corollaire 5.24 (Équivalent des séries de Riemann revisité (HP))**.**

1. *Si* $\alpha < 1$*,* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$*;*
2. *Si* $\alpha > 1$*,* $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$*;*
3. *Si* $\alpha = 1$*,* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$*.*

Éléments de preuve. *Procéder par télescopage, en trouvant un équivalent simple de* $\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}$*, ou de* $\ln(n+1) - \ln(n)$ *dans le dernier cas.*

Remarque 5.25 (DA de sommes partielles ou de restes)**.**

- *Trouver un équivalent simple du terme général, puis, suivant le cas, un équivalent du reste ou de la somme partielle par sommation.*
- *Retrancher l'équivalent à la somme partielle ou au reste. Cela définit une nouvelle suite* (u_n) *qu'on peut étudier via la série télescopique* $\sum(u_n - u_{n-1})$*.*
- *On peut itérer. Dans les situations « standard », à chaque étape, on est ramené à une somme de Riemann, via un développement limité.*
- *Attention à la bascule à faire des sommes partielles aux restes, quand on affine suffisamment le DA pour passer du cas divergent au cas convergent. Cela introduit en général une constante dans le DA, qu'on n'est pas en mesure de calculer.*

On peut appliquer cela (sauf la première étape déjà faite) aux séries de Riemann elles-mêmes. Par exemple :

Exemple 5.26 (DA de la série harmonique)**.** *Montrer qu'il existe une constante γ telle que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

La constante γ est appelée constante d'Euler-Mascheroni. À l'heure actuelle, malgré de nombreuses recherches à ce propos, on ne sait toujours pas si γ est rationnelle ou non.

Exemple 5.27.
1. *Trouver un DA à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ de $\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$. On n'explicitera pas la constante.*
2. *Trouver un DA à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$ de $\sum_{k=1}^{n} k^2 e^{-\frac{k}{n}}$. À nouveau, on n'explicitera pas la constante.*

6. Séries dans un e.v.n.

Le but de ce paragraphe est d'adapter rapidement les définitions et propriétés générales vues sur les séries numériques dans le cadre de séries à valeurs dans un e.v.n.

6.1 Définitions et propriétés générales

Définition 6.1 (Convergence d'une série dans un e.v.n.)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n., et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ converge dans E si la suite des sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} u_k$ admet une limite $S \in E$ (au sens de la norme $\|\cdot\|$).*

Le vecteur S est alors appelé somme de la série $\sum u_n$, et on note

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

On adapte évidemment au cas d'une série ne commençant pas au rang 0.

Exemple 6.2.
1. *Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $u_n = (\delta_{n,m})_{m\in\mathbb{N}} = \mathbb{I}_{\{n\}}(m)$. On munit E de la norme $\|(x_m)_{m\in\mathbb{N}}\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x_k|}{k}$.*

   Montrer que $\sum u_n$ converge, et en donner sa somme.
2. *On reprend le même exemple, mais on munit cette fois E de la norme $\|(x_m)_{m\in\mathbb{N}}\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$.*

   La série est-elle encore convergente ?

La technique mise en œuvre dans le deuxième exemple nous montre que certains principes d'étude des suites numériques s'adaptent, notamment :

Proposition 6.3 (Divergence grossière)**.**
1. *Soit $\sum u_n$ une série convergente dans un e.v.n. E. Alors $u_n \to 0_E$.*
2. *Par contraposée, une série dont le terme général ne tend pas vers 0 est divergente. On dit dans ce cas que la série est grossièrement divergente.*

Un certain nombre de propriétés connues dans le cadre numérique restent vraies. Par exemple :

Proposition 6.4 (Linéarité de la somme). *Soit E un e.v.n. et $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries d'éléments de E, et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(u_n + \lambda v_n)$ aussi, et*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
2. *Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, $\sum(u_n + v_n)$ diverge.*

Remarque 6.5. 1. *Que dire si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent ?*

2. *Si on considère une somme de p séries, à quelles conditions de convergence peut-on déduire à coup sûr la nature de la série de la somme ?*

Dans la plupart des cas, on essayera de se ramener au cadre réel positif, de la même manière que lorsqu'on étudie la convergence absolue dans le cadre des séries numériques, grâce au théorème qui suit. Attention à l'hypothèse de finitude indispensable dans ce théorème. Comme dans le cas réel, l'étude de la convergence de suites peut se ramener à l'étude de la convergence de séries télescopiques :

Théorème 6.6 (Lien suite-série). *Soit E un e.v.n. et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de même nature que la série télescopique*
$$\sum(u_{n+1} - u_n).$$

6.2 Séries à valeurs dans un e.v.n. de dimension finie

Dans le cadre de la dimension finie, on peut souvent se ramener au cas de séries réelles positives, comme ce qu'on fait en étudiant la convergence absolue de séries numériques.

Définition 6.7 (Convergence absolue, CVA). *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que $\sum u_n$ converge absolument (ou normalement) si la série numérique $\sum \|u_n\|$ est convergente.*

Attention à l'hypothèse de finitude de la dimension dans le théorème suivant.

Théorème 6.8 (CVA implique CV). *Soit E un e.v.n. de dimension finie, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge.*
Éléments de preuve. *Travailler avec la norme $\|\cdot\|_\infty$ pour se ramener à la convergence absolue coordonnée par coordonnée.*

Exemple 6.9. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ converge.*

Définition 6.10 (Exponentielle matricielle). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit*
$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$
De même, si E est un e.v.n. de dimension finie, on définit, pour $u \in \mathcal{L}(E)$:
$$\exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}.$$

L'exponentielle matricielle est notamment l'outil adéquat pour la résolution des systèmes différentiels, généralisant ainsi la résolution connue en dimension 1. Nous étudierons plus en détail les propriétés de l'exponentielle matricielle dans un chapitre ultérieur.