Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique • Mathématiques

Rappel - Ensembles finis et groupes symétriques

Mouad El Assadi

Professeur agrégé de mathématiques

Ingénieur d'État en génie civil — École Hassania des Travaux Publics (EHTP)

elassadimouad1@gmail.com

Table des matières

1 Ensembles finis **2**
1.1 Définitions 2
1.2 Ensembles et cardinaux 2
1.3 Parties de $\mathbb{N}$ 3

2 Dénombrement **3**
2.1 Opérations sur les ensembles finis 3
2.2 Arrangements 4
2.3 Combinaisons 4

3 Groupe symétrique **5**
3.1 Éléments du groupe symétrique 5
3.2 Décompositions 6
3.3 Signature d'une permutation 6

1. Ensembles finis

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Ensemble fini)**.** *L'ensemble E est un* ensemble fini *si $E = \emptyset$ ou s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une application bijective $f : [1, n] \to E$.*

Exercice 1.2.

1. *Donner des exemples d'ensembles finis.*
2. *Montrer que si E est un ensemble fini et F est en bijection avec E, alors F est un ensemble fini.*

Lemme 1.3. *Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. Il existe une bijection de $[1, p]$ dans $[1, q]$ si et seulement si $p = q$.*

Définition 1.4 (Cardinal)**.** *Soit E un ensemble non vide et $p, q \in \mathbb{N}^*$. On suppose que E est en bijection avec $[1, p]$ et $[1, q]$. Alors, $p = q$. Cette valeur commune est appelée cardinal de E et est notée Card$(E) = |E|$. Par convention, $|\emptyset| = 0$.*

Exercice 1.5.

1. *Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $k \leq n$. Déterminer le cardinal de $[1, n]$ puis de $[k, n]$.*
2. *Montrer que tout ensemble en bijection avec un ensemble fini de cardinal n est fini et de cardinal n.*

1.2 Ensembles et cardinaux

E et F désignent deux ensembles finis.

Lemme 1.6. *Si $x \in E$, alors $E \setminus \{x\}$ est un ensemble fini et $|E \setminus \{x\}| = |E| - 1$.*

Théorème 1.7 (Sous-ensemble)**.** *Si $F \subset E$, alors F est un ensemble fini et $|F| \leq |E|$. De plus, $|F| = |E|$ si et seulement si $F = E$.*

Exercice 1.8. *Montrer que $\mathbb{N}$ n'est pas un ensemble de cardinal fini.*

Lemme 1.9. *Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.*

(i) Si f est injective et F est fini, alors E est fini et $|E| \leq |F|$.

(ii) Si f est surjective et E est fini, alors F est fini et $|F| \leq |E|$.

Théorème 1.10 (Caractérisation des bijections)**.** *Soient E, F deux ensembles finis tels que $|E| = |F|$ et $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) f est injective.

(ii) f est surjective.

(iii) f est bijective.

Corollaire 1.11 (Principe de Dirichlet)**.** *Soient E, F deux ensembles finis tels que $|E| > |F|$ et $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Alors, f n'est pas injective.*

Exercice 1.12. *Montrer que pour tout réel x et tout entier naturel $N \geq 2$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Q}^2$ tel que*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qN}.$$

1.3 Parties de $\mathbb{N}$

Théorème 1.13 (Caractérisation des parties finies de $\mathbb{N}$)**.** *Une partie de $\mathbb{N}$ est finie si et seulement si elle est majorée.*

Théorème 1.14. *Soit $P \subset \mathbb{N}$ un ensemble de cardinal n non nul. Il existe une unique bijection strictement croissante de $[1, n]$ sur P.*

2. Dénombrement

Soient E, F deux ensembles finis.

2.1 Opérations sur les ensembles finis

Proposition 2.1 (Partition)**.** *Si E et F sont deux ensembles disjoints, alors $E \cup F$ est fini et $|E \cup F| = |E| + |F|$.*

Exercice 2.2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Soit $A \subset E$. Montrer que $|E \setminus A| = |E| - |A|$.*
2. *Si $(A_k)_{k\in[1,n]}$ forme une partition de E, montrer que $|\bigcup_{k=1}^n A_k| = \sum_{k=1}^n |A_k|$.*

Proposition 2.3 (Réunion)**.** *Soient $A, B \subset E$. Alors, $A \cup B$ est un ensemble fini et $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.*

Exercice 2.4 (Formule du crible / de Poincaré)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in[1,n]}$ une famille de parties de E. Montrer que*

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|.$$

Proposition 2.5 (Produit cartésien)**.** *$E \times F$ est un ensemble fini et $|E \times F| = |E| \cdot |F|$.*

Théorème 2.6 (Lemme des bergers)**.** *Soit p un entier naturel non nul, E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$. On suppose que pour tout $y \in F$, $|f^{-1}(\{y\})| = p$. Alors, $|E| = p|F|$.*

Exercice 2.7. *Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.*

1. *Déterminer le nombre de couples (x, y) de $[1, n]^2$ tels que $x \neq y$.*
2. *Soit E un alphabet contenant p lettres. Déterminer le nombre de mots de n lettres pouvant être formés avec l'alphabet E qui ne contiennent jamais deux lettres consécutives identiques.*

Proposition 2.8 (Applications)**.** *$\mathcal{F}(E, F)$ est un ensemble fini et $|\mathcal{F}(E, F)| = |F|^{|E|}$.*

Exercice 2.9. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Déterminer le nombre d'applications de $[1, n]$ dans $[1, n]$.*
2. *Déterminer le nombre de façons de tirer successivement 5 boules avec remise dans une urne contenant n boules numérotées.*
3. *Déterminer le nombre de mots de 5 lettres pouvant être construits avec un alphabet constitué des lettres du mot KAYAK.*

Corollaire 2.10.

$$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}.$$

2.2 Arrangements

Définition 2.11 (Arrangements)**.** *Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel. Un arrangement de longueur p d'éléments de E est une p-liste d'éléments de E deux à deux distincts. On note A_n^p le nombre d'arrangements de E de longueur p.*

Proposition 2.12. *Pour tous n, $p \in \mathbb{N}$,*

$$A_n^p = \begin{cases} \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2.13. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de façons de tirer successivement 5 boules sans remise dans une urne contenant n boules numérotées.*

Théorème 2.14. *Soient E un ensemble de cardinal p et F un ensemble de cardinal n.*

(i) Il y a A_n^p injections de E dans F.

(ii) Si $p = n$, il y a $n!$ bijections de E dans F. Les bijections de E sont appelées des permutations.

2.3 Combinaisons

Définition 2.15 (Combinaisons)**.** *Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel. Une combinaison de p éléments de E est une partie de E de cardinal p. On note $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons de p éléments de E.*

Proposition 2.16. *Pour tous n, $p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$.*

Exercice 2.17. 1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de façons de tirer simultanément 5 boules sans remise dans une urne contenant n boules numérotées.*

2. *Déterminer le nombre d'anagrammes du mot KAYAK.*

Théorème 2.18. *(i)* $\forall n, p \in \mathbb{N}, \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

(ii) $\forall n, p \in \mathbb{N}^*, p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

(iii) $\forall p \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}, p\binom{n}{p} = (n-p+1)\binom{n}{p-1}$.

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

(v) Triangle de Pascal. $\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

(vi) Binôme de Newton. $\forall x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*, (x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n-p}$.

3. Groupe symétrique

3.1 Éléments du groupe symétrique

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

Définition 3.1 (Groupe symétrique)**.** *Le groupe symétrique, noté $\mathfrak{S}_n$, est l'ensemble des permutations de $[1, n]$. $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe de cardinal $n!$. Si $n \geq 3$, ce groupe est non commutatif.*

Remarque 3.2 (Notation)**.** *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On note* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Exercice 3.3. *Décrire l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$.*

Définition 3.4 (Transposition)**.** *Une transposition de $\mathfrak{S}_n$ est une permutation θ telle qu'il existe $i, j \in [1, n]$ satisfaisant $i \neq j, \theta(i) = j$ et $\theta(j) = i$ pour tout entier k différent de $i, j, \theta(k) = k$. On note $\theta = (i, j)$.*

Exercice 3.5. *Déterminer les transpositions de $\mathfrak{S}_3$.*

Proposition 3.6. *Les transpositions sont des applications involutives.*

Définition 3.7 (Cycle)**.** *Soient $p \geq 2$ et $A = \{a_1, \ldots, a_p\} \subset [1, n]$. Soit σ la permutation définie par $\sigma(x) = x, \forall x \notin A$ et $\sigma(a_i) = a_{i+1}, \forall i \in [1, p-1], \sigma(a_p) = a_1$. σ est appelé cycle de longueur p de support A. On note $\sigma = (a_1, \cdots, a_p)$.*

Exercice 3.8 (Ordre d'un cycle)**.** 1. *Déterminer les cycles de $\mathfrak{S}_3$.*

2. *Soit c un cycle de longueur p. Montrer que* $\min\{i \in [1, n] : c^i = Id_{[1,n]}\} = p$.

Proposition 3.9. *Montrer que si c et c' sont deux cycles à support disjoints de $\mathfrak{S}_n$, alors c et c' commutent.*

3.2 Décompositions

Lemme 3.10. *Soit $n \geq 2$ et $\varphi : \mathfrak{S}_{n-1} \to \mathfrak{S}_n, \sigma \mapsto (\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n-1), n)$. φ est un morphisme de groupes et $\varphi(\mathfrak{S}_{n-1}) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma(n) = n\}$.*

Théorème 3.11 (Décomposition)**.** *Toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ se décompose en produit de transpositions.*

Exercice 3.12. *Soit c un cycle. Donner une décomposition de c en produit de transpositions.*

Définition 3.13 (Orbite)**.** *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $x \in [1, n]$. L'orbite de x est l'ensemble $\{\sigma^p(x), p \in \mathbb{N}\}$.*

Exercice 3.14.

1. *Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer l'orbite de chacun des entiers de $[1, 6]$.*
2. *Montrer qu'il existe un entier $p \in [1, n]$ tel que l'orbite de k soit $\{\sigma^\ell(k), \ell \in [0, p-1]\}$.*

Proposition 3.15. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Les orbites de σ forment une partition de $[1, n]$. On notera $o(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ.*

Théorème 3.16. *Toute permutation se décompose comme un produit de cycles à supports disjoints. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.*

Exercice 3.17. *Décomposer la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 2 & 4 & 7 & 9 & 8 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ en produit de cycles à supports disjoints.*

3.3 Signature d'une permutation

Définition 3.18 (Signature)**.** *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. La signature de σ, notée $\varepsilon(\sigma)$, est le nombre $(-1)^{n-o(\sigma)}$.*

Exercice 3.19. *Soit θ une transposition de $\mathfrak{S}_n$. Déterminer la signature de θ.*

Théorème 3.20 (Morphisme)**.** *L'application ε est un morphisme du groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans le groupe $\{(-1, 1), \times\}$.*

Exercice 3.21 (Inversions)**.** *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Le nombre d'inversions de σ, noté $I(\sigma)$, est le cardinal de $\{(i, j) : i < j \text{ ET } \sigma(j) < \sigma(i)\}$. Montrer que $\varepsilon(\sigma) = \prod_{\{i,j\}, i \neq j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = (-1)^{I(\sigma)}$.*

Corollaire 3.22. *Le nombre de transpositions dans la décomposition d'une permutation est de parité constante.*

Exercice 3.23 (Groupe alterné)**.** *L'ensemble $\mathfrak{A}_n = Ker(\varepsilon)$ est le groupe alterné d'ordre n.*

1. *Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est un groupe.*
2. *Soit $n \geq 2$. Montrer que $|\mathfrak{A}_n| = \frac{n!}{2}$.*

Exercice 3.24 (Signature). *Étudier la parité des permutations suivantes :*

1.
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 4 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

3.
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ n & n+1 & n-1 & n+2 & \cdots & 1 & 2n \end{pmatrix}$$

Exercice 3.25 (Conjugaison des transpositions). *Soit σ une permutation et $\theta_{i,j}$ une transposition de $[1, n]$.*

1. Montrer que $\sigma \circ (i, j) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i), \sigma(j))$.

2. En déduire que pour tout $n \geq 3$, le centre de $\mathfrak{S}_n$ est réduit à l'identité.

Exercice 3.26 (Systèmes de générateurs). *Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par :*

1. $\{(1, i), i \in [2, n]\}$

2. $\{(i, i+1), i \in [1, n-1]\}$

3. $\{(1, 2)$ *et* $(2, 3, \ldots, n, 1)\}$

Exercice 3.27 (Groupe alterné). *Montrer que tout produit de deux transpositions peut s'écrire comme un produit de cycles d'ordre 3. En déduire que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les cycles d'ordre 3.*

Exercice 3.28 (Commutant d'un cycle). *Soit $c = (2, 3, \ldots, n, 1)$. Déterminer $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n; \sigma c = c\sigma\}$.*

Exercice 3.29 (Morphismes de $\mathfrak{S}_n$). *Soit $\varphi : (\mathfrak{S}_n, \circ) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ un morphisme de groupe.*

1. Montrer que si θ_1 et θ_2 sont deux transpositions, alors $\varphi(\theta_1) = \varphi(\theta_2)$.

2. En déduire que φ est l'application signature ou l'application constante égale à 1.

Exercice 3.30 (Dérangements). *Soit $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Calculer le nombre D_n de dérangements de $\{1, \ldots, n\}$, c'est-à-dire le nombre de bijections $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ telles que pour tout $k \leq n$, $f(k) \neq k$.*