Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique • Mathématiques

Endomorphismes d'un espace euclidien
Décomposition en valeurs singulières

Mouad El Assadi

Professeur agrégé de mathématiques

Ingénieur d'État en génie civil — École Hassania des Travaux Publics (EHTP)

elassadimouad1@gmail.com

Table des matières

I Rappels sur les espaces euclidiens **2**
I.1 Formes bilinéaires et produit scalaire 2
I.2 Orthogonalité 3
I.3 Projection orthogonale 4
I.4 Coordonnées en base orthonormale 4
I.5 Changements de base orthonormales, matrices orthogonales 5
I.6 Orientation d'un espace 7

II Endomorphismes autoadjoints **7**
II.1 Adjoint d'un endomorphisme 7
II.2 Endomorphismes autoadjoints 9
II.3 Théorème spectral 10
II.4 Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs 11

III Isométries vectorielles **11**
III.1 Définitions 11
III.2 Matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ 13
III.3 Isométries en dimension 2 13
III.4 Réduction des isométries 14

I. Rappels sur les espaces euclidiens

Ce survol rapide des définitions et propriétés essentielles du cours de première année ne remplace pas une révision complète et en profondeur de votre cours de première année. Il n'a pas vocation à être complet, et ne fait que réintroduire rapidement les notions que nous aurons à utiliser par la suite.

I.1 Formes bilinéaires et produit scalaire

Définition I.1 (Forme bilinéaire)**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une forme bilinéaire φ sur E est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$, linéaire par rapport à chaque facteur, l'autre étant fixé, c'est-à-dire :*
(i) $\forall (x,y,z) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda x + y, z) = \lambda\varphi(x,z) + \varphi(y,z)$
(ii) $\forall (x,y,z) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(x, \lambda y + z) = \lambda\varphi(x,y) + \varphi(x,z)$.

On rappelle la propriété de bilinéarité généralisée

Lemme I.2 (Bilinéarité généralisée)**.** *Soit φ une forme bilinéaire sur E. Soit $(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$, et soit $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_\ell) \in E^{k+\ell}$, et*

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_\ell) \in \mathbb{K}^{k+\ell}. \text{ Alors}$$

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_i \mu_j \varphi(x_i, y_j).$$

Définition I.3 (Matrice associée à une forme bilinéaire)**.** *Soit φ une forme bilinéaire sur E de dimension finie, et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors on définit la matrice de φ relativement à la base B par :*

$$Mat_B(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \le i,j \le n}.$$

Théorème I.4 (Caractérisation de $\text{Mat}_B(\varphi)$ par la relation $\varphi(x,y) = X^T M Y$)**.** *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice M est la matrice de φ relativement à la base B si et seulement si pour tout $(x,y) \in E^2$, dont les matrices colonnes coordonnées dans B sont X et Y,*

$$\varphi(x,y) = X^T M Y.$$

Exercice I.5 (Caractérisation de la matrice d'un produit scalaire)**.** *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice M est la matrice relativement à la base canonique d'un produit scalaire si et seulement si M est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.*

Proposition I.6 (Formule de changement de base)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et φ une forme bilinéaire. Soit B et $\mathcal{C}$ deux bases de E, et $P = P_B^{\mathcal{C}}$ la matrice de passage de B à $\mathcal{C}$. Alors*

$$Mat_C(\varphi) = P^T Mat_B(\varphi) P.$$

Définition I.7 (Produit scalaire)**.** *Un produit scalaire φ sur E est une forme bilinéaire telle que :*
(i) (positivité) : pour tout $x \in E$, $\varphi(x,x) \ge 0$
(ii) (caractère défini) : pour tout $x \in E$, $\varphi(x,x) = 0 \iff x = 0$
(iii) (Symétrie) : pour tout $(x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.
On note souvent $\langle x,y\rangle$ ou $\langle x|y\rangle$.
L'expression matricielle d'une forme bilinéaire s'applique aussi aux produits scalaires, et donc, en notant M la matrice du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dans une base B et X et Y les vecteurs-colonne coordonnées de x et y, le produit scalaire s'exprime :

$$\langle x,y\rangle = X^T M Y.$$

Exercice I.8 (Rang de A^TA)**.** *Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^TA)$.

Proposition I.9 (Matrice d'un produit scalaire)**.** *La matrice d'un produit scalaire dans une base quelconque est symétrique et inversible. La réciproque est fausse.*

Définition I.10 (Espace préhilbertien réel)**.** *Un espace préhilbertien réel $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*
S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le produit scalaire, on parlera plus simplement de l'espace préhilbertien E, au lieu de $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Définition I.11 (Espace euclidien)**.** *Un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie.*

I.2 Orthogonalité

On suppose que E est un espace euclidien. La plupart des notions se généralise au cas préhilbertien réel, mais certains propriétés peuvent être fausses en revanche. On rappelle que deux vecteurs x et y sont orthogonaux si, par définition, $\langle x, y\rangle = 0$.

Définition I.12 (Famille orthogonale, orthonormale)**.** *1. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est orthogonale si pour tout $i \neq j$ de I, $x_i \perp x_j$. 2. On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est orthonormale (ou orthonormée) si et seulement si elle est orthogonale, et que pour tout $i \in I$, $\|x_i\| = 1$.*

Une propriété important de ces familles est leur liberté :

Proposition I.13 (Liberté des familles orthogonales)**.** *1. Une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre. 2. Une famille orthonormale est libre.*

Le procédé de Gram-Schmidt permet, à partir d'une famille libre $(e_1, \ldots, e_n)$, de construire une famille orthonormale $(f_1, \ldots, f_n)$ telle que pour tout $k \in [1, n]$

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k), \quad \text{et} \quad \langle e_k, f_k\rangle = 1.$$

En particulier, en partant d'une base d'un espace euclidien, on en déduit :

Théorème I.14 (Existence d'une base orthonormale)**.** *Soit E un espace euclidien. Alors E admet une b.o.n.*

Plus précisément, en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à une base obtenue en complétant une famille orthonormale :

Théorème I.15 (Théorème de la base orthonormale incomplète)**.** *Soit E un espace euclidien. Alors toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.*

Définition I.16 (Sous-espaces orthogonaux)**.** *Les sous-espaces F et G de E sont orthogonaux si pour tout $(x, y) \in F \times G$, $x \perp y$.*

Proposition I.17 (Orthogonalité et somme directe)**.** *Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces de E, 2 à 2 orthogonaux. Alors la somme $\bigoplus_{i\in I} F_i$ est directe.*

Proposition I.18 (Supplémentaire orthogonal)**.** *Soit E un espace euclidien, et F un sous-espace vectoriel de E. L'ensemble $F^\perp = \{y \in E,\ y \perp F\}$ est un supplémentaire de E, orthogonal à F. Il est appelé supplémentaire orthogonal de F.*

Remarque I.19. *C'est faux si E n'est pas de dimension finie (cadre préhilbertien réel au lieu d'euclidien).*

Exercice I.20 (Polynômes de Tchebychev). *(a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $t \mapsto \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$.*

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$: $\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Montrer que cette application est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) On définit la suite de polynômes $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = X \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad T_{k+2} = 2XT_{k+1} - T_k \end{cases}$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}$, $T_k(\cos x) = \cos(kx)$.

(d) Montrer que la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

(e) Calculer $\|T_k\|$ pour tout $k \in [0,n]$.

(f) Montrer que $\left(\frac{T_k}{\|T_k\|}\right)_{0\le k\le n}$ est la base obtenue de la base canonique par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

I.3 Projection orthogonale

Définition I.21 (Projeté orthogonal sur un sev). *Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $y \in E$. On dit que $z \in E$ est le projeté orthogonal de y sur F si et seulement si : (i) $z \in F$ (ii) $(y-z)\perp F$.*

Théorème I.22 (Existence du projeté orthogonal sur un sev de dimension finie). *Soit $y \in E$, et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, et $B = (b_1, \ldots, b_m)$ une b.o.n. de F. Alors le projeté orthogonal de y sur F existe, est unique, et vaut :*

$$z = \sum_{i=1}^{m} \langle y, b_i\rangle b_i.$$

Proposition I.23 (Description de la projection orthogonale). *Soit E un espace euclidien et F un sous-espace de E. L'application p qui a x associe son projeté orthogonal sur F est un projecteur de E. Plus précisément, c'est le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.*

Exercice I.24 (Condition de commutation de deux projecteurs orthogonaux). *Soit E un espace euclidien, et p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $p \circ q = q \circ p$

(ii) $p \circ q$ est un projecteur

(iii) p et q possèdent une base commune de diagonalisation

I.4 Coordonnées en base orthonormale

Théorème I.25 (Coordonnées d'un vecteur dans une b.o.n. et norme). *Soit E un espace euclidien, et $B = (b_1, \ldots, b_n)$ une b.o.n. de E. Soit $x, y \in E$. Alors : (i) $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i\rangle b_i$, c'est-à-dire $[x]_B = \begin{pmatrix} \langle x, b_i\rangle \\ \vdots \\ \langle x, b_n\rangle \end{pmatrix}$. (ii) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i\rangle\langle y, b_i\rangle$. (iii) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i\rangle^2$*

Ainsi, si B est une b.o.n. et si

$$X = [x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad Y = [y]_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

sont les coordonnées de x et y dans la b.o.n. B, le produit scalaire et la norme s'expriment par les formules usuelles :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^\top Y \quad \textit{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = X^\top X.$$

Ces relations traduisent le fait que la matrice du produit scalaire dans une base orthonormale pour ce produit scalaire est égale à I_n.

Théorème I.26 (Matrice d'un endomorphisme relativement à une b.o.n.)**.** *Soit E un espace euclidien muni d'une b.o.n. $B = (b_1, \ldots, b_n)$. Soit $u \in L(E)$. Alors :*

$$\textit{Mat}_B(u) = (\langle b_i, u(b_j)\rangle)_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} \langle b_1, u(b_1)\rangle & \cdots & \langle b_1, u(b_n)\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle b_n, u(b_1)\rangle & \cdots & \langle b_n, u(b_n)\rangle \end{pmatrix}$$

I.5 Changements de base orthonormales, matrices orthogonales

Théorème I.27 (propriété des matrices de passage d'une b.o.n. à une autre)**.** *Soit B et C deux bases de E. Soit $P = P_B^c$ la matrice de passage de la base B à la base C. Alors :*

$$P^\top P = I_n = PP^\top, \quad \textit{donc:} \quad P^{-1} = P^\top.$$

Éléments de preuve. Utiliser la formule de changement de base pour la matrice du ps dans les bases B et C. On peut aussi le retrouver à l'aide de la description explicite de P_B^c et des expressions des $\langle c_i, c_j\rangle$ en b.o.n. B. □

Définition I.28 (Matrice orthogonale)**.** *Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n. On dit que P est une matrice orthogonale si et seulement si $P^\top P = I_n$.*

Exemple I.29. *1. Dans $M_n(\mathbb{R})$, les matrices $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$*
2. La matrice I_n, la matrice $-I_n$, et plus généralement, toute matrice obtenue de I_n en changeant les signes de certains de ses coefficients diagonaux, et en permutant les colonnes.

De la définition même découle de façon immédiate :

Proposition I.30 (Inverse d'une matrice orthogonale)**.** *Soit P une matrice orthogonale. Alors P est inversible, et $P^{-1} = P^\top$.*

Une matrice orthogonale peut se caractériser également par l'orthonormalité de ses colonnes ou ses lignes :

Théorème I.31 (Caractérisation d'une matrice orthogonale par ses colonnes ou lignes)**.** *Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*
(i) P est orthogonale (ii) $P^\top$ est orthogonale (iii) Les colonnes de P forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n \simeq M_{n,1}(\mathbb{R})$ (iv) Les lignes de P forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n \simeq M_{1,n}(\mathbb{R})$.

Théorème I.32 (Caractérisation des matrices de passage entre b.o.n. par orthogonalité)**.** *Soit E un espace euclidien.*
1. Toute matrice de passage d'une b.o.n. de E à une autre b.o.n. de E est une matrice orthogonale. 2. Réciproquement, soit B une b.o.n. de E, et P une matrice orthogonale. Alors il existe une unique base C telle que P soit la matrice de passage de B à C, et cette base C est une b.o.n. de E. 3. De même, si C est une b.o.n. de E, et P une matrice orthogonale, il existe une unique base B telle que P soit la matrice de passage de B à C, et cette base B est une b.o.n. de E.

Éléments de preuve. 1. Résulte de la définition. 2. Remarquer que si x et y sont deux vecteurs de coordonnées X et Y dans une b.o.n, et si φ est le psc, $\langle x, y\rangle = \varphi(X, Y)$. Justifier que ceci permet de définir une b.o.n. dont les coordonnées dans B sont les colonnes de P. 3. Appliquer ce qui précède à P^{-1} qui est encore orthogonal. □

Définition I.33 (Groupe orthogonal)**.** *On note $O_n(\mathbb{R})$, ou $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cet ensemble $O_n(\mathbb{R})$ est appelé groupe orthogonal.*

Théorème I.34 (Structure de $O_n(\mathbb{R})$)**.** *L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, ce qui est cohérent avec la terminologie introduite dans la définition précédente.*

Éléments de preuve. Montrer que c'est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$; les vérifications sont simples. □

Théorème I.35 (Déterminant d'une matrice orthogonale)**.** *Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$. Alors det(P) $\in \{-1, 1\}$. Plus précisément, det est un morphisme de groupe de $O_n(\mathbb{R})$ dans $\{\{-1, 1\}, x\}$.*

Éléments de preuve. Appliquer le det à l'égalité $P^\top P = I_n$. □

Le noyau de ce morphisme est donc un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

Définition I.36 (Groupe spécial orthogonal)**.** *Le noyau du déterminant défini sur $O_n(\mathbb{R})$ est appelé groupe spécial orthogonal, et noté $SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n)$. Ainsi, les éléments de $SO_n(\mathbb{R})$ sont les matrices orthogonales P telles que det(P) = 1.*

Remarque I.37. *Si $n \in \mathbb{N}^*$, le sous-groupe $SO_n(\mathbb{R})$ n'est pas égal à $O(n)$ tout entier. En effet, la matrice Diag$(-1, 1, \cdots, 1)$ est dans $O(n)\backslash SO(n)$.*
Plus précisément, on peut alors montrer qu'il y a « autant » d'éléments dans $SO(n)$ que dans $O(n)\backslash SO(n)$.

Proposition I.38 (Bijection entre $SO(n)$ et $O(n)\backslash SO(n)$)**.** *Soit $P \in O(n)\backslash SO(n)$. L'application*

$$Q \mapsto PQ$$

est une bijection de $SO(n)$ dans $O(n)\backslash SO(n)$.

Définition I.39 (Matrices orthogonales directes, indirectes)**.** *Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$. On dit que : - P est une matrice orthogonale positive (ou directe) si $P \in SO_n(\mathbb{R})$; - P est une matrice orthogonale négative (ou indirecte) si $P \in O_n(\mathbb{R})\backslash SO_n(\mathbb{R})$.*

Exercice I.40 (Exponentielle d'une matrice antisymétrique)**.** *Montrer que pour toute matrice antisymétrique A, $\exp(A)$ est orthogonale. On admettra que si A et B commutent, $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.*

Définition I.41 (Matrices orthogonalement semblables)**.** *Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. 1. On dit que A et B sont orthogonalement semblables s'il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ telle que $B = P^{-1}AP = P^TAP$. 2. On dit que A est orthogonalement diagonalisable si A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale. 3. On dit que A est orthogonalement trigonalisable si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.*

Exercice I.42 (Inégalités sur les coefficients d'une matrice orthogonale). *Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que :*

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.$$

Exercice I.43 (Décomposition QR). *Montrer que toute matrice inversible $M \in GL_n(\mathbb{R})$ se décompose sous la forme $M = QR$, où $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $R \in B_n(\mathbb{R})$, $B_n(\mathbb{R})$ étant le sous-groupe de Borel, constitué des matrices triangulaires supérieures inversibles.*

I.6 Orientation d'un espace

Définition I.44 (Orientation d'un espace). *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. 1. La relation $BRB' \iff det_B(B') > 0$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E 2. Cette relation d'équivalence possède exactement deux classes d'équivalence 3. On dira que B et B' ont même orientation si elles appartiennent à la même classe d'équivalence. 4. Une orientation de E est alors le choix arbitraire d'une de ces deux classes d'équivalence, qu'on fait généralement en se donnant une base de référence B_0. 5. Ainsi, étant donné une base de référence B_0, une base B est directe si $det_{B_0}(B) > 0$, et indirecte si $det_{B_0}(B) > 0$.*
Ainsi, orienter l'espace E consiste à choisir une base de référence B_0. Toute base de la même orientation que B_0 sera alors appelée base directe.

Proposition I.45 (Caractérisation de l'orientation pour les b.o.n.). *Soit B et B' deux b.o.n. d'un espace euclidien E. Les propositions suivantes sont équivalentes: (i) B et B' ont même orientation ; (ii) $Mat_B(B') \in SO(n)$ (iii) $det_B(B') = 1$ (iv) $det_B = det_B$.*

Définition I.46 (Produit mixte dans un espace euclidien orienté). *Soit E un espace euclidien orienté, et B une b.o.n. directe. Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. Le produit mixte de $(u_1, \dots, u_n)$ est défini par :*

$$[u_1, \dots, u_n] = det_B(u_1, \dots, u_n).$$

Cette définition est indépendante du choix de la b.o.n. directe B.

II. Endomorphismes autoadjoints

II.1 Adjoint d'un endomorphisme

Théorème II.1 (Théorème de représentation de Riesz). *Soit E un espace euclidien, et $\varphi \in E^*$ une forme linéaire sur E. Il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\varphi = \langle a, \cdot\rangle$. Plus précisément, $a \mapsto \varphi_a = \langle a, \cdot\rangle$ est un isomorphisme de E dans E^*.*

Définition II.2 (Adjoint d'un endomorphisme). *Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$.*
1. Pour tout $x \in E$: - l'application $y \mapsto \langle x, u(y)\rangle$ est une forme linéaire ; - il existe un unique vecteur $u^*(x) \in E$ tel que pour tout $y \in E, \langle x, u(y)\rangle = \langle u^*(x), y\rangle$.
2. L'application $u^* : x \mapsto u^*(x)$ est un endomorphisme de E.
3. L'endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ est appelé adjoint de l'endomorphisme u.

Éléments de preuve. Le premier point est une vérification élémentaire. Le second provient du théorème de représentation de Riesz. Le fait que u^* soit un endomorphisme provient de l'unicité dans le théorème de représentation de Riesz, en constatant que $\lambda u^*(x) + u^*(x')$ répond au problème de la représentation de la forme linéaire $\langle \lambda x + x', \cdot\rangle$. □

Proposition II.3 (Adjoint d'une composée). *Soit E un espace euclidien, et u et v deux endomorphismes de E. Alors*

$$(v \circ u)^* = u^* \circ v^*.$$

Éléments de preuve. Vérifier que $\langle u^* \circ v^*(x), y\rangle = \langle x, v \circ u\rangle$, égalité qui caractérise l'adjoint $(v \circ u)^*$. □

Proposition II.4 (Double-adjoint). *L'application $u \mapsto u^*$ de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même est involutif. En d'autres termes, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$,*

$$(u^*)^* = u.$$

Éléments de preuve. Simplifier $\langle (u^*) * (x), y\rangle$. La symétrie du produit scalaire pourra être utile pour se ramener de façon précise à la définition. □

Proposition II.5 (Stabilité par u^* de l'orthogonal d'un sous-espace stable). *Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace de E. Les propositions suivantes sont équivalentes: (i) F est stable par u (ii) $F^\perp$ est stable par u^*.*

Éléments de preuve. Sens direct : calculer $\langle u^*(x), y\rangle$ pour $x \in F^\perp$ et $y \in F$. Sens réciproque : cela se ramène au sens direct, par involutivité du passage à l'adjoint et du passage au supplémentaire orthogonal. □

Proposition II.6 (Relations entre images et noyaux). *Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors*

$$Ker(u^*) = (Im(u))^\perp \quad et \quad Im(u^*) = Ker(u)^\perp.$$

Éléments de preuve. La première égalité provient de l'équivalence $x \in \mathrm{Ker}(u^*)$ ssi $\forall y \in E, \langle u^*(x), y\rangle = 0$, puis utiliser la définition de l'adjoint. La seconde égalité se ramène à la première en remplaçant u par u^*. □

Corollaire II.7 (Rang d'un adjoint). *Soit E un espace euclidien, et u un endomorphisme de E. Alors*

$$rg(u^*) = rg(u).$$

Une interprétation matricielle permet de relier ce résultat à un résultat déjà connu, démontré de façon algorithmique.

Proposition II.8 (Représentation matricielle d'un adjoint). *Soit E un espace euclidien, muni d'une base orthonormale B, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors*

$$Mat_B(u^*) = Mat_B(u)^T.$$

Éléments de preuve. Les formes bilinéaires $(x, y) \mapsto \langle u^*(x), y\rangle$ et $(x, y) \mapsto \langle x, u(y)\rangle$ ont des matrices dans B respectivement associées à $\mathrm{Mat}_B(u^*)$. Et à $\mathrm{Mat}_B(u)$, et sont égales.
L'égalité des rangs de u et u^* provient alors de l'invariance du rang par transposition. Ce résultat est plus général que celui qu'on a prouvé ci-dessus (car valide pour des matrices de tout format), mais la démonstration ci-dessus donne un éclairage géométrique à un résultat qui sinon reste purement algorithmique. D'ailleurs, on pourrait adapter cette démonstration à la situation générale, en considérant des applications linéaires entre 2 espaces euclidiens E et F. Le déterminant, la trace, le polynôme minimal et le polynôme caractéristique sont aussi invariants par transposition. On obtient donc : □

Proposition II.9 (Rang, trace, déterminant, spectre d'un adjoint). *Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*
1. $rg(u^*) = rg(u)$ 2. $tr(u^*) = tr(u)$ 3. $det(u^*) = det(u)$ 4. $\mu_u^* = \mu_u$ 5. $\chi_u^* = \chi_u$ 6. Sp(u) = Sp(u), avec égalité des multiplicités (algébriques).*

II.2 Endomorphismes autoadjoints

Une situation particulière importante est le cas des endomorphismes égaux à leur adjoint.

Définition II.10 (Endomorphisme autoadjoint)**.** *Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est un endomorphisme autoadjoint (ou endomorphisme symétrique) si $u = u^*$. On note $S(E)$ l'ensemble des automorphismes auto-adjoints de E.*

Remarque II.11. *La notation utilisée se réfère à la terminologie « endomorphisme syémétique », qui s'explique par l'aspect matriciel évoqué ci-dessous. Mais le programme officiel stipule explicitement de privilégier la terminologie « endomorphisme autoadjoint ».*

La propriété de stabilité des supplémentaires orthogonaux se réexprime dans ce contexte de la façon suivante :

Proposition II.12 (Orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme autoadjoint)**.** *Soit E un espace euclidien, et u en endomorphisme autoadjoint de E. Soit F un sous-espace de E. Les propositions suivantes sont équivalentes : (i) F est stable par u (ii) $F^\perp$ est stable par u.*

Éléments de preuve. C'est une conséquence immédiate de la proposition analogue pour les endomorphismes quelconques, en utilisant $u = u^*$. □

Proposition II.13 (Matrice d'un endomorphisme autoadjoint dans une b.o.n.)**.** *Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit B une b.o.n. de E. Les propositions suivantes sont équivalentes : (i) u est autoadjoint (ii) $Mat_B(u)$ est symétrique.*

Éléments de preuve. On a $\text{Mat}_B(u^*) = \text{Mat}_B(u)^T$. Donc $u = u^*$ ssi $\text{Mat}_B(u) = \text{Mat}_B(u)^T$. □

Proposition II.14 (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme autoadjoint)**.** *Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E. Alors le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{R}$.*

Éléments de preuve. Procédons par récurrence sur la dimension n de l'espace.
Cas de base : Pour $n = 1$, le polynôme caractéristique est de degré 1 à coefficients réels, donc scindé sur $\mathbb{R}$.
Hérédité : Supposons que toute matrice symétrique réelle de dimension $\leq n$ ait son polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{R}$, et considérons $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ symétrique réelle.
Soit $P_A(X) \in \mathbb{R}[X]$ son polynôme caractéristique. D'après le théorème fondamental de l'algèbre, P_A se décompose en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ de degré 1 ou 2.

- **Cas 1 :** P_A admet un facteur irréductible de degré 1, soit $X - \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $P_A(X) = (X - \lambda)Q(X)$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$. Soit v un vecteur propre réel pour λ. Dans une base orthonormée commençant par v, la matrice A s'écrit :

  $$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

  où B est symétrique réelle de taille n (ceci vient du fait que $A^T = A$). Par hypothèse de récurrence, le polynôme caractéristique de B est scindé sur $\mathbb{R}$, donc $P_A(X) = (X-\lambda)P_B(X)$ l'est aussi.

- **Cas 2 :** Tous les facteurs irréductibles de P_A sont de degré 2. Considérons l'un d'eux : $Q(X) = X^2 + pX + q$ avec $p^2 - 4q < 0$. Soit $F = \ker Q(A)$.

  Montrons que F est stable par A : si $x \in F$, alors $Q(A)x = 0$, et $A(Q(A)x) = Q(A)(Ax) = 0$, donc $Ax \in F$.

Prenons $x \in F$, $x \neq 0$. Alors x et Ax sont linéairement indépendants (car sinon x serait vecteur propre réel). Soit $P = \text{vect}(x, Ax) \subset F$. C'est un plan stable par A.

Soit (e_1, e_2) une base orthonormée de P. Dans cette base, la matrice de $A|_P$ est :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

car M est symétrique. Son polynôme caractéristique est :

$$P_M(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - b^2)$$

Le discriminant de ce polynôme est :

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$$

Donc P_M est scindé sur $\mathbb{R}$.

De plus, $P^\perp$ est stable par A (car A est symétrique) et $A|_{P^\perp}$ est symétrique réelle de dimension $n-1$. Par hypothèse de récurrence, son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $P_A = P_{A|_P} \cdot P_{A|_{P^\perp}}$ est scindé sur $\mathbb{R}$. Absurde car on a supposé dans le cas 2 que P_A n'admet pas de racines.

Conclusion: P_A est scindé sur $\mathbb{R}$ car seul le premier cas est possible. □

II.3 Théorème spectral

Le théorème spectral est un résultat fondamental de la théorie des espaces euclidiens. Il affirme que les endomorphismes autoadjoints sont diagonalisables en base orthonormale.

Théorème II.15 (Théorème spectral)**.** *Soit E un espace euclidien, et $u \in S(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Alors u est diagonalisable en base orthonormale. Plus précisément, il existe une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de u.*

Éléments de preuve. On peut procéder par récurrence sur la dimension de E. - Initialisation : en dimension 1, c'est évident. - Hérédité : soit E de dimension $n \geq 2$, et supposons le théorème vrai pour tout espace euclidien de dimension $< n$. - Le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{R}$, donc u admet au moins une valeur propre réelle λ. - Soit e_1 un vecteur propre unitaire associé à λ. - Soit $F = \text{Vect}(e_1)^\perp$. Alors F est stable par u (car u est autoadjoint). - La restriction $u|_F$ est un endomorphisme autoadjoint de F (qui est un espace euclidien de dimension $n-1$). - Par hypothèse de récurrence, $u|_F$ est diagonalisable en base orthonormale de F. - En concaténant e_1 avec cette base de F, on obtient une b.o.n. de E constituée de vecteurs propres de u. □

Corollaire II.16 (Diagonalisation orthogonale des matrices symétriques réelles)**.** *Toute matrice symétrique réelle est orthogonalement diagonalisable. C'est-à-dire : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = P^TAP$ soit diagonale.*

Éléments de preuve. Interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme autoadjoint dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (qui est orthonormale pour le produit scalaire canonique). Appliquer le théorème spectral. □

II.4 Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs

Définition II.17 (Endomorphisme autoadjoint positif). *Soit E un espace euclidien, et $u \in S(E)$ un endomorphisme autoadjoint. On dit que u est positif (ou semi-défini positif) si pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle \geq 0$. On note $u \geq 0$.*

Définition II.18 (Endomorphisme autoadjoint défini positif). *On dit que u est défini positif si pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\langle u(x), x\rangle > 0$. On note $u > 0$.*

Proposition II.19 (Caractérisation spectrale de la positivité). *Soit $u \in S(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Les propositions suivantes sont équivalentes : (i) $u \geq 0$ (ii) Toutes les valeurs propres de u sont positives ou nulles. De même, les propositions suivantes sont équivalentes : (i) $u > 0$ (ii) Toutes les valeurs propres de u sont strictement positives.*

Éléments de preuve. Utiliser une base orthonormale de diagonalisation. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n. de vecteurs propres avec $u(e_i) = \lambda_i e_i$, alors pour $x = \sum x_i e_i$, on a $\langle u(x), x\rangle = \sum \lambda_i x_i^2$. Le résultat en découle. □

Proposition II.20 (Racine carrée d'un endomorphisme autoadjoint positif). *Soit $u \in S(E)$ un endomorphisme autoadjoint positif. Alors il existe un unique endomorphisme autoadjoint positif v tel que $v^2 = u$. On note $v = u^{1/2}$ et on l'appelle racine carrée de u.*

Éléments de preuve. Dans une base orthonormale de diagonalisation $u(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \geq 0$, définir $v(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$. L'unicité provient du fait que v doit commuter avec u et avoir les mêmes sous-espaces propres. □

III. Isométries vectorielles

III.1 Définitions

Définition III.1 (Isométrie vectorielle). • *Soit E un espace euclidien. Une isométrie vectorielle est un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ conservant la norme, c'est-à-dire tel que*

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|.$$

Une isométrie vectorielle est parfois aussi appelée endomorphisme orthogonal. • On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Proposition III.2 (Structure de $O(E)$; groupe orthogonal). *$(O(E), \circ)$ est un sous-groupe de $GL(E)$. Il est appelé groupe orthogonal de E.*

Éléments de preuve. • La conservation de la norme et la séparation des normes permet de décrire facilement $\mathrm{Ker}(u)$, pour $u \in O(E)$. Un argument de dimension montre alors l'inclusion dans $GL(E)$. • La structure de sous-groupe se vérifie facilement ensuite. □

Exemple III.3. *Les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ (muni du ps usuel) canoniquement associés à $R(\theta)$ et $S(\theta)$ sont des isométries. Pouvez-vous les décrire géométriquement en analysant l'image de la base canonique ?*
L'exemple de $S(\theta)$ se généralise facilement à tout espace.

Définition III.4 (Symétries orthogonales, réflexions). *Soit E un espace euclidien, et $s \in \mathcal{L}(E)$. • s est une symétrie orthogonale ssi il existe un sous-espace F de E tel que s soit la symétrie par rapport à F, parallèlement à $F^\perp$. • s est une réflexion si et seulement si s est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan P.*

Remarque III.5. • *Une symétrie orthogonale par rapport à une droite D est appelée symétrie d'axe D.* • *Une symétrie orthogonale (mais il n'y a pas trop le choix...) par rapport à $\{0\}$ est appelée symétrie centrale.*

Proposition III.6 (Les symétries orthogonales sont des isométries)**.** *Toute symétrie orthogonale est une isométrie.*

Éléments de preuve. Décomposer $x = x_F + x_{F^\perp}$, exprimer $s(x)$ à l'aide de cette décomposition, et comparer $\|x\|$ et $\|s(x)\|$ grâce au théorème de Pythagore. □

Proposition III.7 (Caractérisations des isométries)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes: (i) $u \in O(E)$ (ii) $\forall (x,y) \in E^2, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ (caractérisation par conservation du produit scalaire) (iii) pour toute b.o.n. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, la famille $u(\mathcal{B}) = (u(b_1), \dots, u(b_n))$ est encore une b.o.n. (caractérisation par l'image des bases orthonormales); (iv) il existe une b.o.n. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ telle que $u(\mathcal{B}) = (u(b_1), \dots, u(b_n))$ soit encore une b.o.n. (caractérisation par l'image d'une base orthonormale); (v) pour toute b.o.n. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, $Mat_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$; (caractérisation par sa matrice dans toute base orthonormale) (vi) il existe une b.o.n. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$; (caractérisation par sa matrice dans une base orthonormale) (vii) $u^* = u^{-1}$ (caractérisation par l'adjoint)*

Éléments de preuve. • $(i) \implies (ii)$ en considérant $\|u(x+y)\|$. La réciproque est évidente. • $(ii) \implies (iii) \implies (iv) \implies (vi) \implies (v) \implies (vii) \implies (ii)$; ce n'est évidemment pas le seul parcours possible. □

Remarque III.8. *1. En particulier, le point (ii) assure qu'une isométrie conserve l'orthogonalité. Mais la conservation de l'orthogonalité n'est pas suffisante pour caractériser les isométries. 2. Les points (v) et (vi) justifient la terminologie « endomorphisme orthogonal ». Le programme mentionne les deux terminologies, mais stipule de privilégier « isométrie vectorielle ». 3. Les points (v) et (vi) justifient également la ressemblance de notation et la correspondance des terminologies utilisées pour désigner le groupe des isométries et le groupe des matrices orthogonales. Plus précisément, $u \mapsto Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme entre $O(E)$ et $O_n(\mathbb{R})$.*

Exemple III.9. • *Soit s une symétrie orthogonale. Trouver une b.o.n. dans laquelle $Mat_B(s)$ est orthogonale. Remarquez que cela propose une alternative à la preuve précédente du caractère isométrique des symétries orthogonales.* • *Une symétrie $s \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonale ssi $s^* = s$*
Ce dernier point permet de caractériser les symétries qui sont des isométries.

Proposition III.10 (Caractérisation des symétries isométriques)**.** *Soit s une symétrie de E. Alors s est une isométrie ssi s est une symétrie orthogonale.*

Les points (v) et (vi) donnent accès au déterminant d'une isométrie vectorielle.

Proposition III.11 (Isométries directes et indirectes)**.** *Soit $u \in O(E)$. Alors $\det(u) \in \{-1, 1\}$.* • *Si $\det(u) = 1$, on dit que u est une isométrie directe.* • *Si $\det(u) = -1$, on dit que u est une isométrie indirecte.*

Définition III.12 (Groupe spécial orthogonal)**.** *On note $SO(E)$ l'ensemble des isométries directes de E. C'est un sous-groupe de $O(E)$, appelé groupe spécial orthogonal.*

Remarque III.13. • *L'égalité $|\det(u)| = 1$ est assez naturelle, puisque le déterminant calcule l'effet sur les volumes de l'endomorphisme u : $\det(u)$ est le coefficient de proportionnalité entre le volume orienté du parallélotope engendré par $(x_1, \dots, x_n)$ et le volume orienté du parallélotope engendré par $(u(x_1), \dots, u(x_n))$. Ainsi, l'égalité $|\det(u)| = 1$ ne fait que traduire le fait qu'une isométrie conserve les configurations spatiales, et donc les volumes.* • *Les isométries directes sont celles qui conservent l'orientation des b.o.n., les isométries indirectes sont celles qui inversent l'orientation des b.o.n.*

Exemple III.14. • *Caractériser les symétries orthogonales qui sont dans $SO(E)$.* • *Une réflexion est-elle une isométrie directe ?* • *À quelle condition sur E une symétrie d'axe D est-elle une isométrie directe ?*

III.2 Matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans ce paragraphe, nous donnons la description complète des isométries d'un espace de dimension 2. Au passage, nous définirons la notion d'angle dans un espace euclidien de dimension 2 quelconque, en supposant connue la notion d'angle dans le plan euclidien usuel.
Nous donnons dans cette section une description complète des isométries en dimension 2. Pour cela, nous commençons par déterminer les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Proposition III.15 (Matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)**.** *(i) Soit $M \in SO(2)$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$;*
(ii) Soit $M \in O(2) \backslash SO(2)$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$;
Ces descriptions sont uniques modulo 2π.

Éléments de preuve. En notant C_1 et C_2 les colonnes de M, C_1 est de norme 1 et peut donc s'écrire $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$. Le vecteur C_2 doit être orthogonal à C_1 et unitaire aussi. Cela ne laisse que deux possibilités. □

On note :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Proposition III.16 (Produits dans $O(2)$)**.** *Soit θ, θ' dans $\mathbb{R}$.*
(i) $R(0) = I_2$
(ii) $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta') = R(\theta')R(\theta)$
(iii) $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$.
(iv) $S(\theta)S(\theta') = R(\theta - \theta')$
(v) $S(\theta)R(\theta') = S(\theta - \theta')$
(vi) $R(\theta)S(\theta') = S(\theta + \theta')$.

Éléments de preuve. Calcul direct et peu intéressant, basé sur les formules de trigonométrie. □

En particulier, on reconnaît en $SO(2)$ un groupe qu'on a déjà rencontré.

Théorème III.17 ($SO(2)$ est isomorphe à U)**.** *L'application qui à $R(\theta)$ associe $e^{i\theta}$ est un isomorphisme de groupe entre $SO(2)$ et U.*
En particulier, $SO(2)$ est commutatif.

Éléments de preuve. Montrer qu'on peut passer $\theta \mapsto R(\theta)$ au quotient (de $\mathbb{R}$ par $2\pi\mathbb{Z}$). □

III.3 Isométries en dimension 2

De l'étude précédente, et de la caractérisation matricielle des isométries, il découle de façon immédiate que l'on sait décrire explicitement toutes les isométries d'un espace euclidien de dimension 2.

Lemme III.18 (Matrices orthogonalement semblables à $R(\theta)$)**.** *La seule matrice orthogonalement semblable à $R(\theta)$ est $R(\theta)$ elle-même.*

Définition III.19 (Rotation d'angle θ)**.** *Soit E un espace euclidien de dimension 2. On dit que $u \in L(E)$ est une rotation d'angle θ s'il existe une b.o.n. B telle que $Mat_B(u) = R(\theta)$. En vertu du lemme précédent, cette définition est indépendante du choix de la b.o.n. B et on aura, pour toute b.o.n. C, $Mat_C(u) = R(\theta)$. On notera ρ_θ la rotation d'angle θ.*
D'après les résultats précédents sur les matrices $R(\theta)$, on obtient $\rho_\theta = \rho_{\theta'}$ si $\theta \equiv \theta'[2\pi]$.

Théorème III.20 (Classification des isométries en dimension 2)**.** *Soit E un espace euclidien de dimension 2. 1. Les éléments de $SO(2)$ sont exactement les rotations. 2. Les éléments de $O(2)\backslash SO(2)$ sont exactement les réflexions.*

Éléments de preuve. Le premier point résulte de la description de $SO_2(\mathbb{R})$ et de la définition des rotations. Pour le second point, une inclusion est déjà acquise. Pour la seconde, constater que $S(\theta)^2 = I_2$, donc les éléments de $O(2)\backslash SO(2)$ sont des symétries. Une propriété précédente caractérise les symétries isométriques parmi toutes les symétries. □

Les règles de produit matriciel dans $SO(2)$ amènent directement les règles de composition des rotations, dont l'interprétation géométrique est assez intuitive :

Proposition III.21 (Inverse et composée de deux rotations)**.** *(i) $\rho_0 = id_E$ (ii) Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}$, $\rho_\theta \circ \rho_{\theta'} = \rho_{\theta+\theta'} = \rho_{\theta'} \circ \rho_\theta$ (iii) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\rho_\theta^{-1} = \rho_{-\theta}$.*

Nous pouvons définir la notion d'angle orienté entre deux vecteurs grâce aux rotations. Pour cela, nous utilisons le lemme suivant :

Lemme III.22. *Soit E un espace euclidien orienté, et soit x et y deux vecteurs de norme 1 de E. Il existe une unique rotation ρ telle que $\rho(x) = y$.*

Éléments de preuve. Si on se fixe une orientation, il existe une unique b.o.n. directe B de premier vecteur x et une unique b.o.n. directe C de premier vecteur y. La rotation ρ doit nécessairement envoyer B sur C. □

Définition III.23 (Angle orienté entre deux vecteurs)**.** *Soit E un espace vectoriel orienté, et x et y deux vecteurs non nuls de E. Alors l'angle orienté (x, y) est l'angle θ, défini modulo 2π, de l'unique rotation ρ telle que*

$$\rho\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{y}{\|y\|}.$$

Proposition III.24 (Réflexion de matrice $S(\theta)$)**.** *Soit E un espace euclidien de dimension 2, $s \in O(E)\backslash SO(E)$, et $B = (b_1, b_2)$ une b.o.n. de E. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $Mat_B(s) = S(\theta)$. Alors, s est la réflexion par rapport à la droite dirigée par un vecteur unitaire u tel que $(\overrightarrow{b_1}, u) = \frac{\theta}{2}$.*

Éléments de preuve. Faire un changement de base pour exprimer s dans l'unique base (u, v) telle que (u, v) soit orthonormale de même orientation que B. Que peut-on dire de la matrice de passage ? □

III.4 Réduction des isométries

On cherche maintenant à décrire toutes les isométries de E. On montre plus précisément qu'un endomorphisme est une isométrie si et seulement s'il existe une b.o.n. dans laquelle sa matrice est diagonale par blocs, chaque bloc étant de la forme $1, -1, R(\theta)$.
Dans cette section, E désigne un espace euclidien.

Lemme III.25 (Stabilité des orthogonaux)**.** *Soit u une isométrie, et F un sous-espace stable par u. Alors $F^\perp$ est aussi stable par u.*

Éléments de preuve. Passer par u^*, et le fait que u^{-1} est un isomorphisme. □

Lemme III.26 (Existence d'un sous-espace strict stable). *Soit E de dimension au moins 3, et soit u O(E). Il existe F un sous-espace de E, distinct de {0} et de E, tel que F soit stable par u.*

Éléments de preuve. Considérer un facteur irréductible P de χ_u, de degré d, et un vecteur x Ker(P(u)). Justifier que Vect$(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$ est stable par u. □

Théorème III.27 (Réduction des isométries). *Soit u une isométrie. Il existe une base orthonormée B, des entiers naturels p, q et k, et des réels $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ tels que $Mat_B(u)$ soit diagonale par blocs de la forme*

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & -I_q & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & \cdots & & R(\theta_k) \end{pmatrix}$$

Réciproquement, tout endomorphisme se réduisant ainsi en base orthonormale est une isométrie.

Éléments de preuve. Par récurrence forte. Puisque le lemme donnant l'existence d'un sous-espace stable strict est valide uniquement à partir de la dimension 3, il faut initialiser pour E de dimension inférieure ou égale à 2. L'étude précédente nous donne le cas dim(E) = 2. □

Corollaire III.28 (Classification des isométries en dimension 3). *Toute isométrie d'un espace euclidien de dimension 3 se réduit sous l'une des formes suivantes, en base orthonormale $B = (b_1, b_2, b_3)$:*
1. Isométrie directe :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}$$

(rotation autour de l'axe $b_1, dansleplan Vect(b_2, b_3)$)
2. Isométries indirectes :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(rotation autour de l'axe $b_1 etrflexion par rapport Vect(b_2, b_3)$)

Exercice III.29 (Décomposition en valeurs singulières). *Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.*

(a) Montrer que $AA = 0 \iff A = 0$. Dans la suite, on suppose que $A \neq 0$.

(b) Montrer que $A^TA \in S_p^+(\mathbb{R})$ et $AA^T \in S_n^+(\mathbb{R})$.

(c) Montrer : $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}(A^TA)$, $\mathrm{Ker}(A^T) = (\mathrm{Im}A)^\perp$, $\mathrm{rg}(A^TA) = \mathrm{rg}(AA^T)$.

(d) Soit $(V_1, \dots, V_p)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A^TA respectivement associées aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, rangées telles que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_p$ et soit $r = \max\{i \in [1, p], \lambda_i > 0\}$. Pour $i \in [1, r]$, on pose $\beta_i = \sqrt{\lambda_i}$, $U_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} AV_i$, et si $r < n$, on note $(U_{r+1}, \dots, U_n)$ une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(AA^T)$. Montrer que $(U_1, \dots, U_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

(e) Justifier l'existence de matrices orthogonales (définies à l'aide des U_i et V_j), $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $Q \in O_p(\mathbb{R})$, telles que $A = P\Delta Q^T$, où $\Delta \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice rectangulaire constituée d'une diagonale de $\sqrt{\lambda_i}$, où les λ_i sont les valeurs propres non nulles de A^TA, rangées dans l'ordre décroissant. Cette décomposition est appelée décomposition de A en valeurs singulières.