Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique • Mathématiques

Réduction des endomorphismes

Mouad El Assadi

Professeur agrégé de mathématiques

Ingénieur d'État en génie civil — École Hassania des Travaux Publics (EHTP)

elassadimouad1@gmail.com

Table des matières

1 Éléments propres d'un endomorphisme **2**
1.1 Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres 2
1.2 Exemples 4
1.3 Éléments propres d'une matrice carrée 4
1.4 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie 6
1.5 Recherche de valeurs propres 8
1.6 Exemples 8
1.7 Multiplicité géométrique et algébrique d'une valeur propre 9
1.8 Théorème de Cayley-Hamilton 9
1.9 Diagonalisation d'un endomorphisme, point de vue algébrique 10
1.10 Diagonalisation d'une matrice 11
1.11 Exemples 13

2 Trigonalisation **13**
2.1 Trigonalisabilité et caractérisations algébriques 13
2.2 Endomorphismes nilpotents 15
2.3 Sous-espaces caractéristiques 15

Définition 0.1 (Matrices semblables)**.** *On dit que deux matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $M = PNP^{-1}$. Cela définit une relation binaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, appelée relation de similitude.*

Cette relation est un peu plus forte que la relation d'équivalence, puisqu'on impose l'égalité des deux matrices de passage. De fait, deux matrices semblables sont équivalentes mais la réciproque est fausse.

Proposition 0.2 (La relation de similitude est une équivalence)**.** *La relation de similitude est une relation d'équivalence. Ses classes d'équivalence sont appelées classes de similitude.*

Ainsi, le problème de la réduction des endomorphismes se ramène donc à la recherche de représentants simples dans une classe de similitude donnée. Dans l'idéal, on souhaiterait donner même un représentant privilégié dans chaque classe de similitude, comme on l'avait fait avec les matrices $J_{n,p,r}$ pour les classes d'équivalence matricielle, de sorte à pouvoir classifier les classes de similitude. Comme on le verra, c'est un problème assez dur, auquel on ne répondra pas complètement cette année.

1. Éléments propres d'un endomorphisme

On suppose que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Le corps $\mathbb{K}$ est supposé être un sous-corps de $\mathbb{C}$, conformément au programme, même si la plupart des résultats de ce chapitre restent vrais sans cette condition.

1.1 Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

Si l'on souhaite trouver une base B telle que $\text{Mat}_B(u)$ soit diagonale, en particulier $u(b) \in \mathbb{K}b$, donc $u(\mathbb{K}b) \subset \mathbb{K}b$. Les vecteurs de cette base engendrent donc des droites stables par u.

Le problème de la diagonalisation est donc très lié à la recherche des droites stables. Réciproquement, une droite $\mathbb{K}b$ est stable si et seulement si $u(b) \in \mathbb{K}b$, donc s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(b) = \lambda b$, c'est-à-dire $(u - \lambda id)(b) = 0$.

Définition 1.1 (Valeurs propres, vecteurs propres, s.e.p.)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Une valeur propre de u est un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\text{Ker}(u - \lambda id) \neq \{0\}$, donc tel que $u - \lambda id$ ne soit pas injectif.*

2. *Soit λ une valeur propre de u. Le sous-espace propre associé à λ est :*

$$E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda id_E).$$

3. *Les éléments non nuls de $E_\lambda(u)$ sont alors appelés vecteurs propres associés à la valeur propre λ.*

Remarque 1.2.

1. *Par définition, si λ est une valeur propre, $E_\lambda(u) \neq \{0\}$, et il existe donc au moins un vecteur propre associé à λ. Une valeur propre λ se caractérise donc par le fait qu'il existe $x \in E_\lambda(0)$ tel que $u(x) = \lambda x$.*

2. *Il arrive parfois, pour des raisons techniques (éviter des discussions) d'étendre la notation $E_\lambda(u)$ au cas où λ n'est pas une valeur propre. Dans ce cas, λ est une valeur propre si $E_\lambda(u) \neq \{0\}$.*

3. *Les s.e.p. sont parfois aussi notés* $SEP_\lambda(u)$.

Exemple 1.3. *Décrire les valeurs propres et les sous-espaces propres d'un projecteur.*

Définition 1.4 (Spectre)**.** *Lorsque* E *est de dimension finie, on note* $Sp(u)$ *l'ensemble des valeurs propres de* u*. L'ensemble* $Sp(u)$ *est appelé spectre de* u*.*

Proposition 1.5 (Somme directe des s.e.p.)**.** *Soit* $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ *des valeurs propres. Alors la somme* $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$ *est directe.*

Éléments de preuve. Par le lemme de décomposition des noyaux. Peut aussi se montrer facilement directement par récurrence, c'est un bon entraînement, mais c'est un peu plus fastidieux. □

Corollaire 1.6. *Soit* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes. Alors* $(x_i)_{i\in I}$ *est libre.*

Éléments de preuve. Ce sont des vecteurs non nuls de sous-espaces vectoriels en somme directe. □

Corollaire 1.7 (Majoration du nombre de valeurs propres)**.** *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie* n*, et* $u \in \mathcal{L}(E)$*. Alors* $|Sp(u)| \leq n$*.*

Éléments de preuve. Soit par l'examen des dimensions, soit par le corollaire précédent qui donne sinon une famille libre trop grande. □

Dans le but d'étudier des propriétés de réduction simultanée, nous aurons besoin du lemme suivant :

Proposition 1.8 (Stabilité des s.e.p. de u par v commutant avec u)**.** *Soit* $u, v \in \mathcal{L}(E)$ *tels que* $u \circ v = v \circ u$*. Alors* v *laisse stable les sous-espaces propres de* u *(et inversement).*

Remarque 1.9. *En particulier, puisque* u *commute avec lui-même, les sous-espaces propres de* u *sont stables par* u*. Cela se comprend bien de façon directe, sans passer par ce résultat, et c'est une évidence, mais ça ne fait pas de mal que ce soit dit explicitement au moins une fois!*

Enfin, remarquons qu'une façon de restreindre la recherche des valeurs propres de u est de s'intéresser à des polynômes annulateurs :

Théorème 1.10 (Valeurs propres et racines d'un polynôme annulateur)**.** *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$*.*

1. *Soit* P *un polynôme annulateur de* u*. Alors toute valeur propre est racine de* P*.*
2. *Si* u *admet un polynôme minimal* μ_u*, alors les racines de* μ_u *sont exactement les valeurs propres de* u

Éléments de preuve. 1. Par récurrence, si x est un vecteur propre associé à λ, $u^n(x) = \lambda^n \cdot x$, puis $P(u)(x) = P(\lambda) \cdot x$.

2. Pour le point 2, une inclusion est acquise. Si l'inclusion est stricte, on peut factoriser $P(u)$ par $u - \lambda$ id, où λ n'est pas une valeur propre. L'injectivité de $u - \lambda$ id permet alors de contredire la minimalité de μ_u. □

Remarque 1.11. *Lorsque* E *est de dimension finie, on peut réexprimer ces propriétés à l'aide du spectre :*

1. *Pour tout polynôme annulateur* P *de* u*,* $Sp(u) \subset Rac(P)$*;*
2. $Sp(u) = Rac(\mu_u)$*.*

1.2 Exemples

Exemple 1.12. 1. *Quelle est la seule valeur propre possible d'un endomorphisme nilpotent ?*

2. *Déterminer les valeurs propres dans C de l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à*
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3 Éléments propres d'une matrice carrée

Le dernier exemple suggère qu'on peut adapter toutes les définitions et propriétés au cas des matrices. Comme l'espace de travail est alors de dimension finie, on n'a pas besoin de précaution particulière pour parler du spectre. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de M si $\text{Ker}(M - \lambda I_n) \neq \{0\}$, c'est-à-dire s'il existe $X \neq 0$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $MX = \lambda X$. Cela équivaut aussi à dire que la matrice $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
- L'ensemble des valeurs propres de M est noté $\text{Sp}(M)$, et est appelé spectre de M.
- Un vecteur propre associé à λ est un élément non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $MX = \lambda X$, c'est-à-dire $X \in \text{Ker}(M - \lambda I_n)\backslash\{0\}$.
- Le sous-espace propre $E_\lambda(M)$ associé à la valeur propre λ est $\text{Ker}(M - \lambda I_n)$. C'est donc l'ensemble des vecteurs propres, augmenté de 0.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe, et donc en nombre au plus égal à n.
- Les valeurs propres sont racines de tout polynôme annulateur P de M : $\text{Sp}(M) \subset \text{Rac}(P)$.
- Les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme minimal : $\text{Sp}(M) = \text{Rac}(\mu_M)$.

À cela on ajoute les deux propriétés suivantes.

Proposition 1.13 (Spectre de matrices semblables)**.** *Deux matrices semblables ont même spectre.*

Éléments de preuve. Si M et N sont semblables, $M - \lambda I_n$ et $N - \lambda I_n$ le sont aussi, donc ont même rang. □

Le lien entre éléments propres d'une matrice et éléments propres d'un endomorphisme se fait via les résultats suivants.

Proposition 1.14 (Éléments propres de u et de $\text{Mat}_\mathcal{B}(u)$)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors :*

1. *$Sp(u) = Sp(Mat_\mathcal{B}(u))$;*

2. *x est vecteur propre de u associé à λ si $[x]_{\mathcal{B}}$ est vecteur propre de $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ associé à λ;*
3. *Pour $\lambda \in Sp(u)$, $E_\lambda(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)) = \varphi_{\mathcal{B}}(E_\lambda(u))$, où $\varphi_{\mathcal{B}} : x \mapsto [x]_{\mathcal{B}}$.*

On fait aussi la correspondance entre polynômes de l'endomorphisme u et polynômes de la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.

Proposition 1.15 (Polynômes d'endomorphismes versus polynômes de matrices)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E.*

1. *Pour tout $P \in \mathcal{L}(E)$, $Mat_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(Mat_{\mathcal{B}}(u))$.*
2. *En particulier, P est un polynôme annulateur de u si et seulement s'il est un polynôme annulateur de $Mat_{\mathcal{B}}(u)$.*
3. *Notamment, $\mu_u = \mu_{Mat_{\mathcal{B}}(u)}$.*

Sur les matrices, on dispose d'une opération d'extension des scalaires, consistant à voir les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}')$, dès lors que $\mathbb{K}'$ est un corps contenant $\mathbb{K}$. C'est notamment ce qu'il se produit lorsqu'on considère une matrice à coefficients réels comme une matrice à coefficients complexes. Dans cet exemple, on peut notamment se demander si le spectre d'une matrice réelle M reste le même selon qu'on considère M comme une matrice réelle ou comme une matrice complexe. La réponse est non en général, mais une inclusion est vraie.

Exercice 1.16. *(Polynôme minimal ponctuel et endomorphismes cycliques) Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. On note :*

$$I = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0\} \quad \textit{et} \quad I_x = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u)(x) = 0\}.$$

1. *Montrer qu'il existe μ et μ_x des polynômes unitaires non nuls tels que $I = \mu\mathbb{K}[X]$ et $I_x = \mu_x\mathbb{K}[X]$. Le polynôme μ_x est appelé polynôme minimal ponctuel de u en x.*
2. *Montrer que pour tout $x \in E$, μ_x divise μ, et qu'il existe $x \in E$ tel que $\mu_x = \mu$.*
3. *On dit qu'un endomorphisme u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E = Vect(u^k(x), k \in \mathbb{N})$. Montrer que u est cyclique si et seulement si $\mu = \chi_u$.*

Proposition 1.17 (Extension du corps des coefficients)**.** *Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$ deux corps tels que $\mathbb{K}$ soit un sous-corps de $\mathbb{K}'$, et soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $Sp_{\mathbb{K}}(M)$ et $Sp_{\mathbb{K}'}(M)$ le spectre de M vue respectivement comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}')$. Alors $Sp_{\mathbb{K}}(M) \subset Sp_{\mathbb{K}'}(M)$.*

Éléments de preuve. Un vecteur propre $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est aussi un vecteur propre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}')$. □

Exemple 1.18. *L'inclusion peut être stricte, comme le montre l'exemple de* $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie

Parfois, la résolution de l'équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$ peut s'avérer laborieuse et calculatoire, et la recherche d'un polynôme annulateur un peu hasardeuse. On donne dans cette section un outil qui permet également de déterminer les valeurs propres. Il s'agit du polynôme caractéristique de u, dont les racines sont les valeurs propres.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Le fait que λ soit valeur propre se traduit par le fait que $\lambda id - u$ ne soit pas bijective, c'est-à-dire que le déterminant de sa matrice relativement à une base quelconque est nul.

Or, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $XI_n - M$ est une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$. Le déterminant ne faisant intervenir que des produits et des sommes des coefficients de la matrice, $\det(XI_n - M)$ est bien défini dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition 1.19 (Polynôme caractéristique d'une matrice)**.** *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique χ_M de M est le polynôme défini par*

$$\chi_M(X) = \det(XI_n - M) \in \mathbb{K}[X]$$

Proposition 1.20 (Coefficients du polynôme caractéristique)**.** *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors*

(i) $\deg(\chi_M) = n$.

(ii) En écrivant $\chi_M = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a $a_n = 1$ (donc χ_M est unitaire)

(iii) $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(M)$

(iv) $a_0 = (-1)^n \det(M)$.

Ainsi, $\chi_M = X^n - \operatorname{tr}(M)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M)$.

Éléments de preuve. Par la formule de développement, tous les termes sont de degré au plus $n-2$, sauf celui indexé par id. En effet, une permutation de Θ_n ne peut pas avoir exactement $n-1$ points fixes. On obtient donc les termes de degré n et $n-1$ en développant $(X-a_{1,1})\cdots(X-a_{n,n})$, ce qui se fait avec les relations de Viète. Le coefficient a_0 s'obtient par évaluation. □

Proposition 1.21 (Racines du polynôme caractéristique)**.**

$$\mathit{Rac}(\chi_M) = \mathit{Sp}(M).$$

Éléments de preuve. λ est racine est $\det(\lambda I_n - M) = 0$. Qu'est-ce que cela signifie sur l'inversibilité de la matrice ? □

Voici une situation dans laquelle le polynôme caractéristique est simple à calculer :

Proposition 1.22 (Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire)**.** *Soit T une matrice triangulaire, de coefficients diagramaux $t_{1,1}, \ldots, t_{n,n}$. Alors*

$$\chi_T(X) = (X - t_{1,1}) \cdots (X - t_{n,n}).$$

Ainsi, les valeurs propres de T sont les coefficients diagonaux.

Proposition 1.23 (Polynôme caractéristique de matrices semblables)**.** *Soit M et N deux matrices semblables. Alors $\chi_M = \chi_N$.*

Par conséquent, vu les deux derniers résultats obtenus, si on recherche une matrice triangulaire T semblable à une matrice M, les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de M, leur multiplicité sur la diagonale de T correspondant à leur multiplicité dans le polynôme caractéristique de M. C'est ce qu'on appelle la multiplicité algébrique d'une valeur propre. Le dernier résultat permet aussi de définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u d'un espace E de dimension finie. En effet, si B et C sont deux bases de E, $\text{Mat}_B(u)$ et $\text{Mat}_C(u)$ sont semblables.

Définition 1.24 (Polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$)**.** *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors le polynôme caractéristique de u est défini par*

$$\chi_u = \chi_{Mat_B(u)},$$

où B est une base de E. Cette définition est indépendante du choix de la base.

Les propriétés du polynôme caractéristique de u sont alors similaires à celles d'une matrice représentant u. Par exemple, comme la trace de u est également définie comme étant la trace commune des matrices représentant u dans une base quelconque, et comme le déterminant vérifie aussi cette propriété, on en déduit que

$$\chi_u(X) = X^n - \text{tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u).$$

Exercice 1.25. *Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$*

1. *Montrer que si A est inversible, alors AB et BA ont meme polynome caracteristique.*
2. *Montrer que cette condition reste valide sans condition sur A*
3. *Dans cette question, $\mathbb{K}$ est un corps quelconque. Justifier que $A - TI_n$ est inversible dans $\text{Mat}_n(\mathbb{K}(T))$. En deduire que le resultat de la question 2 reste valide dans tout corps.*

Proposition 1.26 (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit)**.** *Soit F stable par $u \in \mathcal{L}(E)$, et u_F l'endomorphisme induit sur F par u. Alors $\chi_{u_F} \mid \chi_u$.*

Éléments de preuve. Dans une base convenable, la matrice de u est triangulaire par bloc, l'un des blocs étant une matrice de u_F. Utiliser le calcul du déterminant de matrices triangulaires par blocs. □

Exercice 1.27. *Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que le coefficient du monoine X^{n-2} dans le polynome caracteristique de A est $\frac{1}{2}(\text{Tr}(A)^2 - \text{Tr}(A^2))$.*

Exercice 1.28. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

1. *Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tr(M^k) en fonction des valeurs propres de M et de leur multiplicité algébrique.*
2. *Soit r le nombre de valeurs propres distinctes de M et soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $k \in [1, n + r - 1]$, tr$(M^k) =$ tr(N^k). Montrer que M et N ont même polynôme caractéristique.*
3. *Montrer que $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in [1, n]$, tr$(N^k) = 0$.*

1.5 Recherche de valeurs propres

On a donc essentiellement 3 méthodes pour la recherche des valeurs propres, plus ou moins efficaces selon la situation.

1. **Méthode 1 :** Résoudre l'équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$, en essayant de voir à quelle condition sur λ cette équation admet une solution autre que la solution triviale. En dimension infinie, sauf s'il existe un polynôme annulateur de petit degré facile à deviner, c'est la seule solution vraiment envisageable.

2. **Méthode 2 :** Rechercher un polynôme annulateur, si possible de petit degré. En dimension finie, on sait qu'il en existe un, et on montrera qu'il en existe un de degré au plus $n = \dim(E)$. En se plaçant dans le cadre matriciel, on peut trouver un polynôme annulateur en calculant les premières puissances M^k, et en trouvant une relation entre ces puissances. Les valeurs propres sont à trouver parmi les racines de ce polynôme.

   C'est parfois peu commode et hasardeux. De plus, il faut un peu d'habitude pour trouver les polynômes annulateurs après avoir calculé les premières puissances. Enfin, comme on ne devine pas toujours le polynôme minimal, on peut trouver des racines qui ne sont pas valeurs propres. Ça peut en revanche être efficace s'il y a peu de valeurs propres par rapport à la dimension, ou si le contexte fournit un polynôme annulateur naturel.

3. **Méthode 3 :** Calculer le polynôme caractéristique, par un calcul de déterminant, et chercher les racines de ce polynôme.

Méthode 1.29. *Recherche d'espaces propres*

Une fois qu'on a déterminé les valeurs propres λ, ou au moins, un ensemble fini qui contient toutes les valeurs propres, résoudre $u(x) = \lambda x$, de l'inconnue x. Si on est en dimension finie, cela se ramène à la résolution d'un système linéaire d'équations.

1.6 Exemples

Exemple 1.30. *1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres associés de l'endomorphisme $D : f \mapsto f'$ du C-ev $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & & & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

et de

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.7 Multiplicité géométrique et algébrique d'une valeur propre

On donne les définitions dans le cadre d'un endomorphisme, mais cela s'adapte évidemment aussi au cas des matrices.

Définition 1.31 (Multiplicités d'une valeur propre)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in Sp(u)$*

1. *La multiplicité géométrique de λ est la dimension de $E_\lambda(u)$.*
2. *La multiplicité algébrique de λ est la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u.*

Remarque 1.32. *Les deux notions peuvent différer.*

En revanche, on a toujours une inégalité qui est satisfaite :

Proposition 1.33 (Comparaison des multiplicités géométrique et algébrique)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors la multiplicité géométrique est inférieure à la multiplicité algébrique.*

En d'autres termes, la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est majorée par la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u.

Éléments de preuve. Considérer le polynôme caractéristique de $u_{E_\lambda(u)}$, l'endomorphisme induit par u sur le sous-espace stable $E_\lambda(u)$. □

Faisons pour terminer un bilan des résultats obtenus pour les endomorphismes induits.

Proposition 1.34 (Multiplicités des valeurs propres d'un endomorphisme induit)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension fini, F un sev de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que F est stable par u. Alors :*

1. *$\chi_{u_F} | \chi_u$;*
2. *$Sp(u_F) \subset Sp(u)$;*
3. *pour tout $\lambda \in Sp(u_F)$, la multiplicité algébrique de λ en tant que valeur propre u_F est inférieure à sa multiplicité algébrique en tant que valeur propre de u;*
4. *pour tout $\lambda \in Sp(u_F)$, la multiplicité géométrique de λ en tant que valeur propre u_F est inférieure à sa multiplicité géométrique en tant que valeur propre de u;*

1.8 Théorème de Cayley-Hamilton

On a constaté que les polynômes annulateurs d'une matrice (ou d'un endomorphisme) ont un lien très fort avec le spectre de cette matrice, puisque le spectre est inclus dans l'ensemble des racines. On a aussi vu que les racines du polynôme caractéristique sont exactement les valeurs propres. On peut donc raisonnablement se demander si le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur. Le fait que ses racines soient des valeurs propres n'est pas suffisant pour conclure, car on n'a pas de contrôle suffisant sur la multiplicité. Si la multiplicité est trop faible (inférieure à la multiplicité dans le polynôme minimal), la réponse est négative. Mais cette situation ne peut en fait pas se produire. C'est ce qu'affirme le théorème de Cayley-Hamilton.

Théorème 1.35 (Cayley-Hamilton). 1. *Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors χ_M est un polynôme annulateur de M.*

2. *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors χ_u est un polynôme annulateur de u.*

Éléments de preuve. Démonstration non exigible. Les deux énoncés sont évidemment équivalents. On montre le cas matriciel.

Écrire $\chi_A(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, et $\text{Com}(XI_n - A)^T = \sum_{k=0}^{n-1} X^k C_k$.

Avec la formule de Cayley, trouver une relation matricielle reliant C_k, C_{k-1}, A et a_k. Former alors $\chi_A(A)$ par télescopage. □

Corollaire 1.36 (Relation entre χ_u et μ_u). 1. *Le polynôme minimal μ_u divise le polynôme caractéristique χ_u.*

2. *En particulier, $\deg(\mu_u) \leq n$.*

Exercice 1.37. *(Une deuxième démonstration du théorème de Cayley-Hamilton)*

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $T_1, \ldots, T_n$ des matrices triangulaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que le coefficient diagonal en position (i,i) de i soit nul. Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, et pour tout $k \in [0,n]$, $E_k = Vect(e_1, \ldots, e_n)$. Montrer que pour tout $k \in [1,n]$, et tout $X \in E_k$, $T_1 \ldots T_k X = 0$.*

2. *En déduire une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.*

1.9 Diagonalisation d'un endomorphisme, point de vue algébrique

La caractérisation de la diagonalisabilité par le polynôme caractéristique, qui est lui-même un polynôme annulateur de u, suggère qu'on peut adopter également un point de vue purement algébrique, basé sur l'étude des polynômes annulateurs de u. On rappelle qu'un polynôme simplement scindé est un polynôme sans racine multiple, ayant autant de racines que son degré (ou de façon équivalente, dont les seuls diviseurs irréductibles sont de degré 1).

Théorème 1.38 (Caractérisation de la diagonalisabilité par polynômes annulateurs). *Soit u un endomorphisme de E. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *u est diagonalisable;*

(ii) *u admet un polynôme annulateur (non nul) simplement scindé;*

(iii) *le polynôme minimal de u est simplement scindé.*

Éléments de preuve.
- $(i) \implies (ii)$: Considérer $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(E)} (X - \lambda)$, et utiliser le décomposition de E en somme directe de ses propres.
- $(ii) \implies (iii)$: Dans ce cas, le polynôme minimal est un diviseur d'un polynôme scindé.
- $(iii) \implies (i)$: par le lemme de décomposition des noyaux.

□

Corollaire 1.39 (Polynôme minimal d'un endomorphisme diagonalisable)**.** *u est diagonalisable si et seulement si $\mu_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)}(X - \lambda)$.*

Lemme 1.40 (Polynôme minimal d'un endomorphisme induit)**.** *Soit u un endomorphisme de E, et F un sous-espace de E stable par u. Soit $u_F \in \mathcal{L}(F)$ l'endomorphisme induit par u sur F.*

1. *Tout polynôme annulateur de u est un polynôme annulateur de u_F.*
2. *En particulier, μ_{u_F} divise μ_u.*

Proposition 1.41 (Diagonalisabilité d'un induit)**.** *Soit u un endomorphisme diagonalisable, et F un sous-espace de E stable par u. Alors l'endomorphisme $u_F \in \mathcal{L}(F)$ induit par u sur F est diagonalisable.*

Éléments de preuve. Le lemme implique qu'alors u_F est simplement scindé. □

On en déduit le résultat suivant, hors-programme mais archi-classique en concours.

Théorème 1.42 (Codiagonalisabilité, HP)**.** *Soit u et v deux endomorphismes de E tels que u o v = v o u. Si u et v sont diagonalisable, alors il existe une base commune B de diagonalisation (c'est-à-dire une base dont les éléments sont tous à la fois des vecteurs propres de u et des vecteurs propres de v).*

Éléments de preuve. Les $E_{\lambda_i}(u)$ sont stables par v. L'endomorphisme induit v$_i estalorsdiagonalisable. Il$ formée de vecteurs propres de v. Faire cela pour chaque sev $E_{\lambda_i}(u)$ et concatérer toutes ces bases. □

Exercice 1.43. *À quelle condition un endomorphisme ayant une unique valeur propre est-il diagonalisable ?*

Exercice 1.44. *(Commutant d'un endomorphisme diagonalisable) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et soit u un endomorphisme diagonalisable de E. On pose :*

$$C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid uv = vu\},$$

appelé commutant de u. Déterminer $\dim C(u)$ en fonction des dimensions des sous-espaces propres de u.

1.10 Diagonalisation d'une matrice

On traduit sans surprise ces définitions et propriétés dans le contexte matriciel.

Proposition 1.45 (Diagonalisabilité d'une matrice)**.** *Soit M $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

- *L'endomorphisme canonique associé à M est diagonalisable;*
- *Il existe une matrice D diagonale et une matrice P $GL_n(\mathbb{K})$ telle que M = PDP^{-1}; $Mestsemblableunematric$*
- *On dit qu'une matrice vérifiant ces propriétés équivalentes est diagonalisable.*
- Éléments de preuve. (i) (ii) par la formule de changement de base. (ii) (iii) est la définition de matrices semblables. □

Proposition 1.46 (Caractérisation matricielle de la diagonalisabilité de u)**.** *Soit u* $\mathcal{L}(E)$. *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) u est diagonalisable;

(ii) pour toute base B de E, $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ *est diagonalisable;*

(iii) il existe une base B de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ *soit diagonalisable.*

Du fait même de cette correspondance très forte entre diagonalisabilité d'un endomorphisme et diagonalisabilité d'une matrice, ainsi que d'après les propositions 9.1.15 et 9.1.16, toutes les propriétés vues dans le paragraphe précédent reste valides pour les matrices, et en particulier :

- la caractérisation géométrique 9.2.2 de la diagonalisabilité par la décomposition de E en somme directe de sous-espaces propres, ou par l'égalité entre multiplicité algébrique et géométrique des valeurs propres ;
- la diagonalisabilité d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres distinctes (corollaire 9.2.3);
- la caractérisation algébrique 9.2.4 de la diagonalisabilité par les polynômes simplement scindés.
- la propriété (HP) de codiagonalisabilité.

Définition 1.47 (Diagonaliser M)**.** *Diagonaliser une matrice M consiste à expliciter une matrice P* $GL_n(\mathbb{K})$ *et une matrice diagonale D* $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ *telles que M =* PDP^{-1}.

1. **Méthode :** Diagonaliser M
   (a) Rechercher les valeurs propres de M, soit en calculant le polynôme caractéristique, soit en trouvant un polynôme annulateur simple.
   (b) Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(M)$, résoudre le système linéaire $MX - \lambda X = 0$, et donner une base de $E_\lambda(M)$.
   (c) Justifier (ou infirmer) la diagonalisabilité par un argument de dimension ou par les multiplicités des racines d'un polynôme annulateur.
   (d) Le cas échéant, construire une base de diagonalisation par concaténation de bases des espaces propres.
   (e) Définir P comme la matrice de passage de la base canonique à cette base, et écrire la formule de changement de base pour conclure.

Exercice 1.48. *Connexité par arcs de l'ensemble des matrices diagonalisables Soit* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est connexe par arcs. On pourra montrer qu'il est étoilé.*

Remarque 1.49. *La diagonalisation permet par exemple de calculer les puissances d'une matrice* $A = PDP^{-1}$. *En effet, par simplification des termes intermédiaires,* $A^n = PD^nP^{-1}$. *On peut donc aussi notamment calculer ainsi des exponentielles matricielles.*

1.11 Exemples

Exemple 1.50. *Diagonalisabilité, et le cas échéant, diagonalisation des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.51. *(Densité des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

2. Trigonalisation

Toutes les matrices ne sont donc pas diagonalisables. On peut déterminer, sur $\mathbb{C}$, des formes réduites privilégiées (sous forme de matrices diagonales par blocs du type $\lambda I + J$, où J est une matrice de Jordan), valide de façon plus générale dès que le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ (réduction de Jordan). Cette décomposition n'est pas simple à obtenir (même si cela reste accessible avec les outils de classe préparatoire). Nous nous contentons d'étudier une propriété intermédiaire un peu dégradée, qui est l'existence d'une base B de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire (c'est le cas de la réduction de Jordan). D'autres types de réduction existent, valides sous des conditions sur $\mathbb{K}$ plus générales, par exemple la décomposition de Forbenius qui donne une forme réduite diagonale par blocs, avec des blocs diagonaux égaux à des « matrices compagnons » de certains polynômes. E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

2.1 Trigonalisabilité et caractérisations algébriques

Définition 2.1 (Trigonalisabilité)**.**

1. *On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ s'il existe une base B de E telle que $Mat_B(u) \in \mathcal{T}^+(\mathbb{K})$.*
2. *On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}MP \in \mathcal{T}^+(\mathbb{K})$. En notant T cette matrice, on a alors $M = PTP^{-1}$.*

Les deux définitions (vectorielle et matricielle) se ramènent l'une à l'autre, comme dans le cas de la diagonalisabilité.

Proposition 2.2 (Trigonalisabilité d'un endomorphisme versus matrice)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et B une base de E*

1. *u est trigonalisable si et seulement si $Mat_B(u)$ est trigonalisable.*
2. *En particulier, M est trigonalisable si et seulement si l'endomorphisme $f_M \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à M est trigonalisable.*

Proposition 2.3 (Caractérisation de la trigonalisabilité par stabilisation d'un drapeau)**.** *Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement s'il existe une suite*

$$\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n = E$$

de sous-espaces vectoriels, où $n = \dim(E)$, et vérifiant :

- *pour tout $k \in [0, n]$, $\dim(E_k) = k$ (ainsi la suite est strictement croissante).*
- *E_k est stable par u*

Une telle suite d'espaces vectoriels est parfois appelée drapeau de l'espace E.

La pratique de la trigonalisation est quelque chose de technique et compliqué, vous serez nécessairement guidé dans la démarche. En revanche, il existe une condition très simple de trigonalisabilité. Cette CNS a évidemment un analogue matriciel.

Théorème 2.4 (CNS de trigonalisabilité)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *u est trigonalisable ;*

(ii) *Le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé ;*

(iii) *u admet un polynôme annulateur (non nul) scindé ;*

(iv) *le polynôme minimal de u est scindé.*

Éléments de preuve.
- (i) $\implies$ (ii) : exprimer le polynôme caractéristique à partir d'une base de trigonalisation.
- (ii) $\implies$ (iii) : d'après Cayley-Hamilton
- (iii) $\implies$ (iv) : car μ_u divise alors un polynôme scindé
- (iv) $\implies$ (i) : faire une récurrence, en distinguant suivant que μ_u est constant ou non. S'il n'est pas constant, il a une racine, qui est alors une valeur propre de u. Considérer une base commençant par un vecteur propre associé.

□

Remarque 2.5. *On peut se dispenser de l'utilisation du théorème de Cayley-Hamilton ici, en remarquant que (ii) $\implies$ (i) peut se faire comme (iv) $\implies$ (i), et que (i) $\implies$ (iii) peut se faire directement, en considérant le polynôme P simplement scindé dont les racines sont les coefficients diagonaux d'une matrice triangulaire T représentant u, et en remarquant que $P(T)$ est strictement triangulaire supérieure. On a alors $(P(T))^n = 0$, donc P^n est un polynôme annulateur scindé de T.*

Corollaire 2.6. *Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable*

Éléments de preuve. C'est d'Alembert-Gauss □

De la même façon, toutes les propriétés qui suivent, utilisant une hypothèse de scindement du polynôme caractéristique, sont systématiquement vraies sur C.

2.2 Endomorphismes nilpotents

Nous avons déjà eu l'occasion de justifier que les endomorphismes nilpotents u sont caractérisés par leur polynôme minimal, égal à X^d, où d est l'indice de nilpotence de u.

Cela se traduit également sur le polynôme caractéristique, et sur les propriétés de trigonalisation. L'espace E est toujours un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie égale à n.

Théorème 2.7 (Caractérisation des endomorphismes nilpotents)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) u *est nilpotent*

(ii) u *admet un polynôme annulateur de la forme* X^k

(iii) μ_u *est de la forme* X^d*,* d *étant alors l'indice de nilpotence*

(iv) u *est trigonalisable, et* $Sp(u) = \{0\}$

(v) il existe une base B *de* E *dans laquelle* $Mat_B(u)$ *est triangulaire supérieure stricte.*

(vi) $\chi_u = X^n$*, où* $n = \dim(E)$

Corollaire 2.8 (Majoration de l'indice de nilpotence revisité)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. L'indice de nilpotence d de u vérifie $d \leq \dim(E)$.*

Exercice 2.9. *(Caractérisation topologique de la nilpotence) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si la matrice nulle est adhérente à la classe de similitude de A.*

2.3 Sous-espaces caractéristiques

Nous allons maintenant obtenir une forme un peu plus précise de la trigonalisation obtenue pour les endomorphismes à polynôme caractéristique scindé. Nous allons pour cela nous ramener à des endomorphismes nilpotents grâce à une factorisation adéquate de l'espace.

Proposition 2.10 (Décomposition de E en somme de sous-espaces caractéristiques)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé. On note*

$$\chi_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda},$$

où m_λ est la multiplicité algébrique de la valeur propre λ. Alors,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} N_\lambda(u), \quad \text{où} \quad N_\lambda(u) = Ker((u - \lambda id)^{m_\lambda}).$$

Le sous-espace $N_\lambda(u)$ (parfois aussi noté $SEC_\lambda(u)$) est appelé sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ de u.

Proposition 2.11 (Endomorphismes induits sur les $N_\lambda(u)$)**.** *Avec les notations de la proposition précédentes :*

1. *Les sous-espaces caractéristiques $N_\lambda(u)$ sont stables par u;*

2. *En notant u_λ l'endomorphisme induit par u sur $N_\lambda(u)$, $u_\lambda - \lambda id$ est nilpotent.*
3. *Pour tout $\lambda \in Sp(u)$, $\chi_{u_\lambda} = (X-\lambda)^{m_\lambda}$.*
4. *En particulier,* $\dim N_\lambda(u) = m_\lambda$.

Éléments de preuve. Les points 1 et 2 sont immédiats. On déduit du 2 que le polynôme caractéristique de $(u_\lambda - \lambda id)$ est $(X-\lambda)^{d_\lambda}$, où $d_\lambda = \dim N_\lambda(u)$. Utiliser la divisibilité de χ_u par χ_{u_λ}, et la décomposition de E en somme d'espaces caractéristiques pour conclure simultanément les points 3 et 4. □

Corollaire 2.12. *Soit u un endomorphisme tel que $\chi_u = \prod_{i=1}^k (X-\lambda_i)^{m_i}$.*

Alors il existe une base B telle que $Mat_B(u)$ soit diagonale par blocs, de blocs diagonaux $A_1, \dots, A_k$ vérifiant :

(i) la matrice A_i est de taille m_i;

(ii) la matrice A_i est triangulaire à coefficients diagonaux tous égaux à λ_i.

On remarquera que cette matrice est en particulier triangulaire, et cela donne une forme possible un peu plus précise de la trigonalisation de u.

Corollaire 2.13. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à polynôme caractéristique scindé $\chi_M = \prod_{i=1}^k (X-\lambda_i)^{m_i}$.*

Alors M est semblable à une matrice T diagonale par blocs, de blocs diagonaux $A_1, \dots, A_k$ vérifiant :

(i) la matrice A_i est de taille m_i;

(ii) la matrice A_i est triangulaire à coefficients diagonaux tous égaux à λ_i.

On termine cette section par un théorème, grand classique des concours, mais à la marge du programme.

Théorème 2.14 (Décomposition de Dunford, HP)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme à polynôme caractéristique scindé. Alors il existe deux endomorphismes n et d de E tels que :*

(i) $u = n + d$

(ii) n *est nilpotent*

(iii) d *est diagonalisable*

(iv) $n \circ d = d \circ n$.

Évidemment, ce théorème se décline aussi en version matricielle. Le théorème de Dunford assure aussi l'unicité de cette décomposition, ainsi que le fait que cela caractérise le scindement du polynôme caractéristique.