Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique • Mathématiques

Introduction aux variables à densité

Mouad El Assadi

Professeur agrégé de mathématiques

Ingénieur d'État en génie civil — École Hassania des Travaux Publics (EHTP)

elassadimouad1@gmail.com

Table des matières

I Rappels : intégrales généralisées **2**
I.1 Convergence et convergence absolue 2
I.2 Critères de convergence 2
I.3 Règles de calculs 3

II Variables aléatoires à densité **4**
II.1 Définitions et premières propriétés 4
II.2 Lois classiques à densité 6
II.3 Cas des variables du type $Y = \varphi(X)$ 8
II.4 Loi d'une somme de deux variables aléatoires 9

III Espérance d'une variable à densité **10**
III.1 Définition 10
III.2 Formule de transfert 11

IV Moments et variance d'une variable à densité **11**
IV.1 Moments 11
IV.2 Variance 12

V Covariance et corrélation **13**

VI Inégalités et théorèmes limites **13**
VI.1 Principales inégalités 13
VI.2 Notion de convergence en probabilité et en loi 13

I. Rappels : intégrales généralisées

I.1 Convergence et convergence absolue

Définition I.1 (intégrale généralisée en b)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.*
L'intégrale généralisée (ou impropre) de f sur $[a;b[$ est notée $\int_a^b f(t)\,dt$. Elle est dite convergente si $\int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers b avec $x < b$. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Si la limite n'existe pas ou qu'elle est infinie, l'intégrale est dite divergente.

Remarque I.2.

- *La définition s'étend aux fonctions continues sur $]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$.*
- *Si f est une fonction continue sur un intervalle $]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. L'intégrale généralisée de f sur $]a,b[$ est notée $\int_a^b f(t)\,dt$. Elle est dite convergente si pour un réel $c \in]a,b[$, les intégrales généralisées $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ sont convergentes. Dans ce cas, on pose*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Théorème I.3 (convergence absolue)**.** *$\int_a^b f(t)\,dt$ est dite absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente. De plus, si $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente.*

Remarque I.4. *Attention. La réciproque est fausse. Il existe des intégrales généralisées convergentes sans être absolument convergente.*

I.2 Critères de convergence

À l'aide du théorème de convergence monotone, on montre que, pour $f : [a;b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue positive, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si l'application $x \in [a;b[\mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est majorée.

Proposition I.5 (critère de comparaison et de négligeabilité)**.** *Soient f, g deux fonctions continues définies sur $[a,b[$.*

- *Si*
  - *f et g sont positives,*
  - *pour tout $x \in [a,b[$, $f(x) \leq g(x)$,*
  - *$\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente,*

  alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est aussi convergente.
- *Si*
  - *g est positive sur un voisinage de b;*
  - *$f = o(g)$;*
  - *$\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente,*

  alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est aussi convergente.

Proposition I.6 (critère d'équivalence)**.** *Soient f, g deux applications continues définies sur $[a,b[$. Si*

- *f et g sont de signe constant sur un voisinage de b,*
- *$f \sim g$,*

alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont de même nature.

Remarque I.7. *En pratique, on compare souvent aux intégrales de Riemann.*

- *L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente en 0 si et seulement si $\alpha < 1$;*
- *L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.*

I.3 Règles de calculs

Sous réserve de convergence, les propriétés de linéarité, de croissance de l'intégrale, l'inégalité triangulaire et la relation de Chasles sont encore valables. Par contre, pour effectuer une intégration par parties, on se ramène à un segment.

Théorème I.8 (changement de variable)**.** *Soit f continue sur un intervalle $]a;b[$. Si $\varphi :]\alpha;\beta[\to]a;b[$ est une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$, alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(u)\,du$ et $\int_\alpha^\beta \varphi'(t) f(\varphi(t))\,dt$ sont de même nature. Dans le cas de convergence,*

$$\int_a^b f(u)\,du = \int_\alpha^\beta \varphi'(t) f(\varphi(t))\,dt.$$

Remarque I.9. *L'énoncé s'étend au cas décroissant.*

Méthode I.10 (Rédiger un changement de variable dans le cas généralisé)**.** *Calculons $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$.*

- *La fonction $x \in [0;+\infty[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, I est une intégrale généralisée en $+\infty$. De plus,*

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^x}} \sim \frac{1}{e^{x/2}}.$$

  Comme $\int_0^{+\infty} e^{-x/2}\,dx$ est convergente, par le critère d'équivalence pour des intégrandes positives, I est convergente.

- *Soit $\varphi : x \in [0;+\infty[\mapsto \sqrt{1+e^x}$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ par composition. De plus,*

$$\varphi(0) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

  φ est une bijection croissante de $[0;+\infty[$ dans $[\sqrt{2};+\infty[$. Par le théorème de changement de variable, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx \quad \text{et} \quad \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{t}\frac{2t\,dt}{t^2-1} = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2}{t^2-1}\,dt$$

  sont de même nature (convergentes) et égales.

- *Calculons l'intégrale de droite par décomposition*

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2}{t^2-1}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \left[\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{+\infty} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).$$

  Après simplification

$$I = 2\ln(\sqrt{2}+1).$$

Exercice I.11. *Effectuer le changement de variable $u = 1/t$ dans l'intégrale convergente $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$. Que peut-on en déduire?*

II. Variables aléatoires à densité

II.1 Définitions et premières propriétés

Définition II.1 (variable aléatoire à densité)**.** *Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Notons F_X la fonction de répartition de X. On dit que X est une variable aléatoire à densité si :*

- *F_X est continue sur $\mathbb{R}$.*
- *F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.*

Exemple II.2.

- *Si F_X vérifie :*

$$\forall x \in]-\infty; 0[, F_X(x) = 0, \quad \forall x \in [0; 1], F_X(x) = x, \quad \forall x \in]1; +\infty[, F_X(x) = 1,$$

  alors X est une variable à densité. On dira dans la suite que X suit une loi uniforme sur $[0; 1]$.

- *Les variables aléatoires discrètes ne sont pas des variables à densité.*

Remarque II.3. *Soit X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition. Nous avons vu que pour tous réels a, b avec $a < b$,*

$$F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}(a < X \leq b).$$

De plus, on montre que

$$\mathbb{P}(X = b) = F_X(b) - \lim_{a \to b^-} F_X(a).$$

Preuve. En effet, on a par exemple $[X = b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]b - 1/n < X \leq b]$. La suite d'événements $(]b - 1/n < X \leq b])_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion, le théorème de la limite monotone dans sa version probabiliste s'applique. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X = b) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(b - 1/n < X \leq b) = F_X(b) - \lim_{n \to +\infty} F_X(b - 1/n).$$

On conclut en rappelant que la fonction de répartition est continue à gauche.

Si X est une variable aléatoire à densité, F_X est continue. En particulier, pour $b \in \mathbb{R}$: $\mathbb{P}(X = b) = 0$. Plus généralement, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \in]a; b]) = \mathbb{P}(X \in [a; b]) = \mathbb{P}(X \in]a; b[) = \mathbb{P}(X \in [a; b[).$$

Définition II.4 (densité de probabilité)**.** *On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité de probabilité si elle vérifie :*

- *f est positive sur $\mathbb{R}$.*
- *f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.*
- *L'intégrale suivante est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$.*

Remarque II.5. *On démontre (et nous admettons) que toute fonction f positive, continue sauf en un nombre fini de points, intégrable sur $\mathbb{R}$ d'intégrale égale à 1 est une densité de probabilité.*

Exemple II.6. *Justifions que la fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\pi(1+t^2)}$ définit une densité de probabilité.*

- *f est clairement une fonction positive.*
- *f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.*

- *Pour $A \in \mathbb{R}_+$, on a*

$$\int_0^A f(t)\,dt = \int_0^A \frac{dt}{\pi(1+t^2)} = \left[\frac{\arctan(t)}{\pi}\right]_0^A = \frac{\arctan(A)}{\pi} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{\pi/2}{\pi} = \frac{1}{2}.$$

De même, pour $B \in \mathbb{R}_-$, par parité de f, $\int_B^0 f(t)\,dt \xrightarrow[B\to-\infty]{} \frac{1}{2}$. On a bien la convergence et l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$. En conclusion, f est une densité de probabilité.

Exercice II.7. *1. Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ te^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

2. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \frac{\lambda}{e^t+1}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)$.

(a) Déterminer deux réels a et b tels que: $\forall x > 0$, $\frac{1}{x^2+x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.

(b) En déduire la valeur de la constante λ pour que λf soit une densité de probabilité.

Proposition II.8 (densité de probabilité d'une variable à densité)**.** *Soit X une variable aléatoire à densité. Toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à valeurs positives qui coïncide avec F_X' sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points est une densité de probabilité. On dit que f est une densité de probabilité de la variable aléatoire X.*

Proposition II.9 (densité et fonction de répartition)**.** *Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et F_X, f_X respectivement la fonction de répartition et une densité de X.*

- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt$ est convergente, et $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt$.*
- *Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ tels que $a < b$, $\mathbb{P}(X \in [a; b]) = \int_a^b f_X(t)\,dt$.*

Remarque II.10. *En particulier, on a $\mathbb{P}(X \geq x) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt$.*

Exemple II.11. *Reprenons la densité $f(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$ de l'exemple précédent et calculons la fonction de répartition F. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt = \int_{-\infty}^x \frac{dt}{\pi(1+t^2)} = \left[\frac{\arctan(t)}{\pi}\right]_{-\infty}^x = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

Remarque II.12. *Attention. Il ne faut pas confondre fonction de répartition et densité. Rappelons qu'une fonction de répartition est une fonction croissante de limite 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$. Le lien est, pour tout $t \in \mathbb{R}$, sauf un nombre fini,*

$$f_X(t) = F_X'(t).$$

La densité d'une variable X n'est pas unique alors que la fonction de répartition l'est.

Proposition II.13 (la densité caractérise la loi)**.** *Soient X et Y deux variables aléatoires à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Si f est à la fois une densité de X et Y, alors X et Y ont même loi.*

Remarque II.14. *En pratique, donner la loi d'une variable aléatoire à densité est équivalent à donner*

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) \text{ pour tous } a, b \in \mathbb{R},$$

C'est aussi équivalent à donner la fonction de répartition ou une densité de probabilité.

Proposition II.15 (conditions pour une variable à densité). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Si*

- *La fonction f est positive.*
- *La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, éventuellement privé d'un ensemble fini de points.*
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

Alors il existe une variable aléatoire X dont f est une densité de probabilité.

(Résultat admis.)

Exemple II.16 (Loi de Gumbel). *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x-e^{-x}}$$

est densité de probabilité. En effet, il est clair que la fonction est positive et continue sur $\mathbb{R}$ (par composition). Or pour tous $A, B \in \mathbb{R}$ avec $A < B$,

$$\int_A^B f(x)\,dx = \int_A^B e^{-x}e^{-e^{-x}}\,dx = \left[e^{-e^{-x}}\right]_A^B \xrightarrow[A\to-\infty, B\to+\infty]{} 1.$$

II.2 Lois classiques à densité

Définition II.17 (Loi uniforme sur [0,1). *] On dit que X suit la loi uniforme sur $[0,1]$, notée $\mathcal{U}([0,1])$, si sa densité est donnée par :*

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition II.18. *Si $X \sim \mathcal{U}([0,1])$, alors sa fonction de répartition est donnée par :*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

et on a $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{12}$.

Définition II.19 (Loi uniforme sur $[a,b)$. *] Soient $a < b$. On dit que X suit la loi uniforme sur $[a,b]$, notée $\mathcal{U}([a,b])$, si sa densité est donnée par :*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition II.20. *Si $X \sim \mathcal{U}([a,b])$, alors :*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

De plus, $\frac{X-a}{b-a} \sim \mathcal{U}([0,1])$.

Définition II.21 (Loi exponentielle). *Soit $\lambda > 0$. On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre λ, notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si sa densité est donnée par :*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction de répartition est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Proposition II.22. *Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors :*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \textit{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

De plus, $\lambda X \sim \mathcal{E}(1)$.

Proposition II.23 (Propriété d'absence de mémoire)**.** *La loi exponentielle est qualifiée d'être une loi sans mémoire dans le sens que :*

$$\forall t, h > 0, \quad \mathbb{P}(X > t + h \mid X > t) = \mathbb{P}(X > h).$$

Réciproquement, toute variable aléatoire positive à densité vérifiant cette propriété suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = -F'_X(0^+)$.

Définition II.24 (Loi Gamma)**.** *Soit $\nu > 0$. On dit que X suit une loi Gamma de paramètre ν, notée $\gamma(\nu)$, si sa densité est donnée par :*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-x} & \textit{si } x > 0 \\ 0 & \textit{sinon,} \end{cases}$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler.

Remarque II.25.

- $\gamma(1) = \mathcal{E}(1)$.
- *La densité d'une loi $\gamma(\nu)$ est bornée si et seulement si $\nu \geq 1$.*

Proposition II.26. *Si $X \sim \gamma(\nu)$, alors $\mathbb{E}(X) = \nu$ et $\mathbb{V}(X) = \nu$.*

Définition II.27 (Loi normale standard)**.** *On dit que X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ si sa densité est donnée par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

On note souvent Φ la fonction de répartition associée :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt.$$

Proposition II.28.

- *Par symétrie de la densité, $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.*
- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.
- *Φ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + xy' = 0$.*
- *Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 1$.*

Définition II.29 (Loi normale générale)**.** *Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On dit que X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si sa densité est donnée par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Proposition II.30.

- *On a l'équivalence : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.*
- *Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\mathbb{E}(X) = \mu$ et $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$.*
- *Pour $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.*
- *La fonction de répartition de X est donnée par $F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.*

Exemple II.31. *On suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}(0.8, 1.1^2)$. Calculer $\mathbb{P}(-1.3 < X < 1.5)$. (Rép : environ 0,4394)*

II.3 Cas des variables du type $Y = \varphi(X)$

Comment montrer qu'une variable aléatoire est à densité et obtenir une densité?
Soit X, une première variable aléatoire à densité et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application. On pose $Y = \varphi(X)$. Pour justifier que Y est une nouvelle variable aléatoire, on peut procéder comme suit :

- On précise $Y(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par Y.
- On exprime la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X. En particulier, on cherche pour tout $t \in Y(\Omega)$, la probabilité $\mathbb{P}(Y \leq t)$.
- Ensuite, on s'assure que F_Y est bien continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points (noté dans la suite D).
- On calcule la dérivée F_Y sur $\mathbb{R} \setminus D$ afin d'avoir une densité de Y.

Remarque II.32. *Attention. Dans le cas général d'une application φ, rien ne garantit que $Y = \varphi(X)$ reste une variable aléatoire à densité, ni même une variable aléatoire.*

Exemple II.33 (Calcul de la loi de $Y = aX + b$ en fonction de la loi de X)**.** *Soient X une variable aléatoire à densité et $a, b \in \mathbb{R}$. Pour donner la loi de $Y = aX + b$, nous avons vu qu'il suffit de donner la fonction de répartition ou une densité de Y. Soit $t \in \mathbb{R}$.*

- *Pour $a > 0$.*

$$[Y \leq t] = \left[X \leq \frac{t-b}{a}\right] \quad \Rightarrow \quad F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

  Rappelons que F_X est continue et, sauf en un nombre fini de points, F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composition, F_Y est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points sur $\mathbb{R}$. Y est donc une variable aléatoire à densité. F_Y est dérivable sauf en un nombre fini de points avec :

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = \frac{1}{a}F_X'\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{a}f_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

  Relation que l'on peut étendre à tout réel t pour définir une densité de Y.

- *Pour $a < 0$. On a maintenant $[Y \leq t] = \left[X \geq \frac{t-b}{a}\right]$. Passons au complémentaire,*

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}\left(X \geq \frac{t-b}{a}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X < \frac{t-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

  En dérivant,

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = -\frac{1}{a}f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{-a}f_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

  De nouveau, on étend cette égalité à tout réel t. En résumé, on obtient dans tous les cas

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_Y(t) = \frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Exemple II.34. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(2)$. Alors une densité de X est donnée par*

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si l'on pose $Y = -2X + 3$, alors Y est une variable à densité, dont une densité est donnée par

$$f_Y(x) = \frac{1}{2}f_X\left(\frac{3-x}{2}\right) = \begin{cases} e^{-(3-x)} & \text{si } \frac{3-x}{2} \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} e^{x-3} & \text{si } x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple II.35. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$, et soit $Y = -\ln(X)$. Alors $Y(\Omega) = [0, +\infty[$, et donc pour $x < 0$, $\mathbb{P}(Y \leq x) = 0$. Pour $x \geq 0$, on a, par croissance de la fonction exponentielle,*

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(-\ln X \leq x) = \mathbb{P}(\ln X \geq -x) = \mathbb{P}(X \geq e^{-x}).$$

Or $e^{-x} \in [0,1]$ et donc $\mathbb{P}(X \geq e^{-x}) = 1 - F_X(e^{-x}) = 1 - e^{-x}$. Ainsi, la fonction de répartition de Y est

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Donc $Y \sim \mathcal{E}(1)$.

Exercice II.36. *Soit X une variable aléatoire à densité suivant une loi uniforme sur $[-1;1]$. C'est-à-dire, une densité de X est donnée par $f = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1;1]}$.*

1. *Justifier que $U = |X|$ est une variable à densité et donner une densité.*
2. *Faire de même avec $V = X^2$.*
3. *Cas général. Soit Z une variable aléatoire réelle à densité f continue sur $\mathbb{R}$. Justifier que $Y = Z^2$ est une variable aléatoire réelle admettant une densité nulle sur $\mathbb{R}_-$ et donnée sur $\mathbb{R}_+$ par*

$$g(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}(f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})).$$

II.4 Loi d'une somme de deux variables aléatoires

Théorème II.37 (Somme de deux variables à densité indépendantes)**.** *Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives f_{X_1} et f_{X_2}. Alors leur somme $S = X_1 + X_2$ est une variable aléatoire à densité, dont la densité est donnée par le produit de convolution :*

$$f_S(s) = (f_{X_1} * f_{X_2})(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(u) f_{X_2}(s-u)\, du.$$

Exemple II.38 (Somme de deux variables uniformes indépendantes sur [0,1)**.** *] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, et soit $Z = X + Y$. Alors une densité de Z est donnée par :*

$$f_Z(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \in [0,1] \\ 2 - z & \text{si } z \in [1,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition II.39. *Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles à densité indépendantes admettant une variance, alors XY admet une espérance, et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.*

Proposition II.40. *Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles à densité indépendantes admettant une variance, alors $X + Y$ admet une variance et*

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

Proposition II.41 (Stabilité de la loi Gamma)**.** *Soient $\nu_1, \nu_2 > 0$, et soient X, Y deux variables aléatoires réelles à densité indépendantes telles que $X \sim \gamma(\nu_1)$ et $Y \sim \gamma(\nu_2)$. Alors $X + Y \sim \gamma(\nu_1 + \nu_2)$.*

Corollaire II.42. *Si X et Y sont indépendantes et suivent la loi $\mathcal{E}(1)$, alors $X + Y \sim \gamma(2)$.*

Proposition II.43 (Stabilité de la loi normale)**.** *Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Alors*

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Remarque II.44. *On n'ajoute pas les écarts-types, mais bien les variances. Par conséquent, l'écart-type de $X + Y$ est $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.*

Théorème II.45 (Somme d'une variable discrète et d'une variable à densité)**.** *Soient X_1 une variable aléatoire discrète et X_2 une variable aléatoire à densité, indépendantes. Alors leur somme $S = X_1 + X_2$ est une variable aléatoire à densité, dont la densité est donnée par :*

$$f_S(s) = \sum_{x \in X_1(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = x) f_{X_2}(s - x).$$

III. Espérance d'une variable à densité

III.1 Définition

Définition III.1 (espérance)**.** *Soit X une variable aléatoire à densité de densité f. On dit que X admet une espérance si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$ est absolument convergente. Dans ce cas, on note*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt.$$

Remarque III.2. *Attention. Comme pour les variables aléatoires discrètes, il ne faut pas oublier la convergence absolue. En fait, puisque $tf(t)$ est de signe constant sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$, l'intégrale est absolument convergente si et seulement si elle est convergente.*

Exemple III.3.

- *Considérons X une variable à densité dont une densité est précisée par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction f est continue par morceaux, nulle en dehors d'un segment. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\, dt$ converge donc absolument et X admet une espérance avec

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}.$$

- *Reprenons l'exemple d'une variable aléatoire Y de densité $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2} e^{-|t|}$. Par les croissances comparées et le critère de négligeabilité, il est clair que $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$ est absolument convergente. L'espérance existe. La densité f est une fonction paire, donc $t \in \mathbb{R} \mapsto t f(t)$ est impaire. Il vient*

$$\int_{-\infty}^{0} t f(t)\, dt = -\int_0^{+\infty} t f(t)\, dt, \quad \text{puis, } \mathbb{E}(Y) = 0.$$

Exemple III.4 (Loi de Cauchy)**.** *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}$, positive et $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{\pi x^2}$. On a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, donc f est une densité. Soit X une variable aléatoire de densité f. On a $xf(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{\pi x}$, de sorte que $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ diverge, et donc X n'admet pas d'espérance.*

Remarque III.5. *Attention. La condition de parité de la densité n'est pas suffisante, il faut aussi que l'espérance existe comme le montre l'exemple de la loi de Cauchy.*

Proposition III.6 (Linéarité de l'espérance)**.** *Soient X et Y des variables aléatoires à densité admettant une espérance. Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et on a :*

$$\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y).$$

Proposition III.7 (existence par domination)**.** *Soient X, Y deux variables aléatoires à densité sur un même espace probabilisé, admettant une espérance et telles que $0 \leq |X| \leq Y$ presque sûrement. Alors X admet une espérance et $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(Y)$.*

Corollaire III.8. *Si X est une variable aléatoire à densité admettant une espérance, alors pour $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $aX + b$ admet une espérance, et*

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

III.2 Formule de transfert

Théorème III.9 (de transfert)**.** *Soient X une variable aléatoire admettant une densité f_X nulle en dehors de $]a, b[$ avec $(a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ et $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. On a l'équivalence entre*

1. *La variable $\varphi(X)$ admet une espérance.*
2. *L'intégrale $\int_a^b \varphi(t) f_X(t)\, dt$ converge absolument.*

Et en cas de convergence absolue,

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(t) f_X(t)\, dt.$$

Exemple III.10. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, et soit $Y = e^X$. Alors Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^t f_X(t) dt = \int_0^{+\infty} e^t \lambda e^{-\lambda t} dt$ converge absolument. Or, $\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-1)t} dt$ converge si et seulement si $\lambda - 1 > 0 \iff \lambda > 1$. De plus, dans ce cas, on a $\mathbb{E}(Y) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$.*

IV. Moments et variance d'une variable à densité

IV.1 Moments

Définition IV.1 (moment d'ordre r)**.** *Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit $r \in \mathbb{N}^*$. On dit que X admet un moment d'ordre r si X^r admet une espérance. Dans ce cas, on note*

$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r).$$

Proposition IV.2. *Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit $r, q \in \mathbb{N}^*$, avec $q \leq r$. Si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment d'ordre q.*

Démonstration. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|^q \leq 1 + |x|^r$, et donc

$$|x|^q f(x) \leq f(x) + |x|^r f(x).$$

Mais $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge, et donc si $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^r f(t)dt$ converge, il en est de même de $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^q f(t)dt$. □

Remarque IV.3. *En particulier, une variable aléatoire à densité qui admet un moment d'ordre 2 admet une espérance.*

IV.2 Variance

Définition IV.4 (variance et écart-type)**.** *Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.*

- *On appelle variance d'une variable aléatoire X, la quantité $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$.*
- *On appelle écart-type de X, la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.*

Remarque IV.5. *La quantité $\sigma(X)$ est bien définie car $(X - \mathbb{E}(X))^2 \geq 0$. Donc, par croissance de l'espérance, $\mathbb{V}(X) \geq 0$. L'écart-type permet de quantifier les écarts par rapport à la moyenne. Un écart-type fort traduit un « grand éloignement » des valeurs de X par rapport à sa moyenne.*

Proposition IV.6. *Si X est une variable aléatoire réelle de densité f admettant une variance, alors $\mathbb{V}(X) > 0$.*

Démonstration. La fonction $x \mapsto (x-\mathbb{E}(X))^2 f(x)$ est positive sur $\mathbb{R}$, donc son intégrale est positive ou nulle. De plus, $\mathbb{V}(X) = 0$ si et seulement si $(x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)$ est nulle en tous les points de continuité de f. Puisque $x-\mathbb{E}(X)$ ne s'annule que pour $x = \mathbb{E}(X)$, cela signifie que f est nulle sauf éventuellement en un nombre fini de points, ce qui impliquerait $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0$, contradiction avec $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$. □

Proposition IV.7 (propriétés de la variance)**.** *Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.*

- *$\mathbb{V}(X) = 0$ si et seulement si X est une application presque sûrement constante.*
- *Pour tous réels a, b,*

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X) \quad ; \quad \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$

Théorème IV.8 (formule de Koenig-Huygens)**.** *Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Démonstration. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(x - \mathbb{E}(X))^2 f_X(x) = (x^2 - 2x\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2) f_X(x)$$

En intégrant, on obtient $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$. □

Définition IV.9 (variable centrée réduite)**.** *Soit X une variable aléatoire. Nous avons vu qu'une variable aléatoire X est dite centrée si $\mathbb{E}(X) = 0$. Elle est dite réduite si $\sigma(X) = 1$. La variable aléatoire $Y = \frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite.*

Proposition IV.10 (Variances des lois classiques)**.**

- *Si $X \sim \mathcal{U}([a, b])$, alors $\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.*
- *Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.*
- *Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$.*
- *Si $X \sim \gamma(\nu)$, alors $\mathbb{V}(X) = \nu$.*

V. Covariance et corrélation

Théorème V.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soient X, Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Alors XY admet une espérance et on a :*

$$(\mathbb{E}(XY))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).$$

Définition V.2 (Covariance)**.** *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. On appelle covariance de X et Y le nombre :*

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Proposition V.3 (Propriétés de la covariance)**.** *Sous réserve d'existence, pour toutes variables aléatoires X, Y, Z admettant un moment d'ordre 2 et pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:*

1. $\mathbb{V}(aX + bY) = a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y) + 2ab\operatorname{cov}(X, Y)$.
2. $\operatorname{cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$.
3. $\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(Y, X)$ *(symétrie)*.
4. $\operatorname{cov}(aX + bY, Z) = a\operatorname{cov}(X, Z) + b\operatorname{cov}(Y, Z)$ *(linéarité à gauche)*.
5. *Si X et Y sont indépendantes, alors* $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$.

Définition V.4 (Coefficient de corrélation)**.** *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 et de variances non nulles. On appelle coefficient de corrélation de X et Y le nombre :*

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Proposition V.5. *Sous les conditions de la définition ci-dessus, on a :*

$$|\rho(X, Y)| \leq 1,$$

et

$$|\rho(X, Y)| = 1 \iff \exists a, b \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(Y = aX + b) = 1.$$

VI. Inégalités et théorèmes limites

VI.1 Principales inégalités

Théorème VI.1 (Inégalité de Markov)**.** *Soit X une variable aléatoire positive. Alors pour tout $\alpha > 0$:*

$$\mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\alpha}.$$

Corollaire VI.2 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**.** *Si X admet un moment d'ordre 2, alors pour tout $\varepsilon > 0$:*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

VI.2 Notion de convergence en probabilité et en loi

Définition VI.3 (Convergence en probabilité)**.** *On dit qu'une suite (X_n) de variables aléatoires converge en probabilité vers une variable aléatoire X si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

Définition VI.4 (Convergence en loi)**.** *On dit qu'une suite (X_n) de variables aléatoires converge en loi vers une variable aléatoire X si les fonctions de répartition F_{X_n} convergent simplement vers F_X en tout point où F_X est continue.*

Travaux dirigés

Exercice VI.5 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** *Soit $f : [0;\pi] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Justifier que $\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,dt \to 0$.*

Exercice VI.6 (Variante des intégrales de Wallis avec la fonction tangente)**.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n\,dt$.*

1. *Calculer u_0 et u_1.*
2. *Vérifier que $\tan' t = 1 + \tan^2 t$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + u_n = \frac{1}{n+1}$.*
3. *En déduire une fonction Python qui prend en argument n et renvoie u_n.*
4. *Étudier les variations de la suite (u_n). En déduire la convergence de la suite (u_n) et calculer la limite.*

Exercice VI.7. *Soit f une fonction continue bornée sur $[0,+\infty[$.*

1. *Démontrer que les intégrales I et J sont convergentes où ...*

Exercice VI.8. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.*

1. *Donner un exemple où $f(t) \not\to 0$ quand $t \to +\infty$. Un graphe suffit...*
2. *Vérifier que la conclusion $f(t) \xrightarrow{t\to+\infty} 0$ devient vraie si l'on suppose en plus que f de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ convergente.*

Exercice VI.9. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-1/t)\,dt$ soient convergentes.*

1. (a) *Effectuer le changement de variable $u = -1/t$ sur $\int_0^{+\infty} f(t-1/t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{0} f(t-1/t)\,dt$.*

   (b) *En déduire*
   $$2\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-1/t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{t^2}\right) f\left(t-\frac{1}{t}\right)\,dt.$$

   (c) *À l'aide d'un nouveau changement de variable, établir l'égalité*
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t-\frac{1}{t}\right)\,dt.$$

2. *Application. Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$, calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2-1/t^2}\,dt$.*

Exercice VI.10. *Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ non constant. Justifier que l'intégrale*
$$\int_0^{+\infty} \cos(P(t))\,dt$$
est convergente si et seulement si $\deg P \geq 2$.

Variable aléatoire à densité

Exercice VI.11 (Vrai ou faux?)**.** *Toute variance de variable aléatoire réelle à densité est strictement positive.*

Exercice VI.12 (Autour de la loi de Cauchy)**.** *Une variable aléatoire à densité suit une loi de Cauchy si une densité est $f : t \in \mathbb{R} \to \frac{1}{\pi(1+t^2)}$.*

1. *Préliminaires.*

(a) *Simplifier* $\arctan(t) + \arctan(1/t)$ *lorsque* $t \in \mathbb{R}^*$.

(b) *Donner la fonction de répartition d'une loi de Cauchy.*

2. *Soit* X *une variable aléatoire à densité suivant une loi de Cauchy. On pose* $Y = 1/X$.

   (a) *Calculer* $\mathbb{P}(Y < 0)$*, puis, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{P}(0 < Y \leq x)$.

   (b) *Montrer que* Y *suit encore une loi de Cauchy.*

3. *Un tireur envoie sa balle sur un demi-plan droit. On suppose que l'angle* Θ *entre la trajectoire et l'axe* (Ox) *est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$*. Justifier que la position* Z *de la balle sur la cible (d'axe* $x = 1$*) suit une loi de Cauchy.*

Exercice VI.13. *Soit* X *une variable aléatoire de densité* f *symétrique (i.e.* $f(-t) = f(t)$*).*

1. *Préciser* $\mathbb{P}(X \geq 0)$.

2. *On note* F *la fonction de répartition de* X*. Justifier que* $x \in \mathbb{R} \mapsto F(x) - \frac{1}{2}$ *est impaire.*

3. *On suppose que* $\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt$ *converge. Démontrer que* X *admet une espérance et la calculer.*

Exercice VI.14. *Soient* X *et* Y *deux variables à densité. On suppose que* X *et* Y *admettent une espérance et des densités strictement positives sur* $\mathbb{R}$.

1. *Soit* F_X *la fonction de répartition de* X*. Quelle est la loi de* $F_X^{-1}(U)$ *où* $U \sim \mathcal{U}(]0;1[)$*?*

2. *La figure ci-contre (non reproduite) est la représentation graphique des fonctions de répartition de* X *et* Y*. Quelle est la variable dont l'espérance est la plus grande? Justifier.*

Exercice VI.15 (Nouvelle expression de l'espérance)**.** *Soit* X *une variable aléatoire à densité. On note* f *une densité de* X*, et* F *sa fonction de répartition. On suppose que* f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et que* $f = 0$ *sur* $\mathbb{R}_-$.

1. *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^x (1 - F(t))\,dt = x(1 - F(x)) + \int_0^x tf(t)\,dt. \quad (\bullet)$$

2. *On suppose dans cette question que* X *possède une espérance.*

   (a) *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq x \int_x^{+\infty} f(t)\,dt \leq \int_x^{+\infty} tf(t)\,dt$.

   (b) *En déduire que* $x(1 - F(x)) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

   (c) *À l'aide de la relation* $(\bullet)$*, montrer que l'intégrale* $\int_0^{+\infty}(1 - F(t))\,dt$ *converge, et que* $\int_0^{+\infty}(1 - F(t))\,dt = \mathbb{E}(X)$.

3. *On étudie la réciproque. On suppose dans cette question que l'intégrale* $\int_0^{+\infty}(1 - F(t))\,dt$ *converge.*

   (a) *Montrer que l'application* $\varphi : x \mapsto \int_x^{+\infty} tf(t)\,dt$ *est croissante sur* $\mathbb{R}_+$.

   (b) *Montrer en utilisant* $(\bullet)$ *que* φ *est majorée.*

   (c) *En déduire que* $\mathbb{E}(X)$ *existe et que*

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(t))\,dt.$$

4. *Adapter le raisonnement pour montrer que si* X *admet un moment d'ordre 2, alors*

$$\mathbb{E}(X^2) = 2\int_0^{+\infty} t(1 - F(t))\,dt.$$

Exercice VI.16. *Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Montrer que la fonction g définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = F(x+1) - F(x)$$

est une densité de probabilité.

Exercice VI.17. *Soit X une variable aléatoire admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}$ et un moment d'ordre 2. Caractériser la valeur du réel a qui minimise l'expression*

$$\varphi(a) = \mathbb{E}((X-a)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-a)^2 f(t)\, dt.$$

Exercice VI.18.

1. (a) *Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.*

   (b) *Soit V une variable aléatoire telle que $V(\Omega) = [0, \pi/2]$ suivant la loi uniforme sur $[0, \pi/2]$ (une densité est donnée par $\frac{2}{\pi}\mathbf{1}_{[0,\pi/2]}$). On pose: $X = \tan^2(V)$. Montrer que X est une variable aléatoire à densité.*

   (c) *En déduire que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{x}(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.*

2. (a) *Compléter le code python de la fonction simulX suivante de sorte que son application à l'entier N ($N \geq 2$) fournisse une matrice ligne contenant N simulations indépendantes de la variable aléatoire X.*

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
def simulX(...):
u=rd.rand(N)
x=np.ones(N)
for i in range(N):
x[i]= ...
return x
```

   (b) *Après avoir affecté une valeur entière supérieure ou égale à 2 à la variable N, on exécute les commandes suivantes. Trouver la loi d'une variable aléatoire dont la valeur de c est, en fin de boucle, une simulation.*

```
N=100
c=0
x=simulX(N)
for i in range(N):
if x[i]>1:
c=c+1
```

Exercice VI.19. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

1. *Vérifier que f est une densité de probabilité. On note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dont f est une densité de probabilité.*

2. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence du moment d'ordre m de la variable X. Donner la valeur de l'espérance de X.*

3. *Pour tout entier n non nul et tout réel x, on pose :*

$$H_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\left(1 + te^{-n|t|}\right) dt.$$

Montrer que H_n est une fonction de répartition.

4. *Soit X_n une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, dont H_n est la fonction de répartition. Vérifier que pour tout réel x*

$$H_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$$

où F est la fonction de répartition de X.

Exercice VI.20. *Soient $Z \sim \mathcal{U}([0;1])$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n \sim \mathcal{U}([1;n])$. Comparer*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\arctan\left(\frac{Y_n}{n}\right)\right) \quad \textit{et} \quad \mathbb{E}(\arctan(Z)).$$

Exercice VI.21. 1. *On pose pour tout $t \in]-1;1[$, $g(t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$.*

   (a) *Justifier que g est une bijection de $]-1;1[$ dans $\mathbb{R}$.*

   (b) *Donner une expression simple de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Justifier que g^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner $(g^{-1})'$.*

   (c) *Soit $X \sim \mathcal{U}([-1;1])$. On définit la variable $T = g(X)$.*

      i. *Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_T(x) = F_X(g^{-1}(x))$.*

      ii. *En déduire que T est une variable aléatoire à densité. On précisera une densité.*

2. (a) *Justifier que $U = |X|$ est une variable à densité et donner une densité.*

   (b) *Faire de même avec $V = X^2$.*

Exercice VI.22. *On considère l'application f définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{e^{-t}}{(e^{-t}+1)^2}.$$

1. *Montrer que f est une densité de probabilité.*

2. *Soit X une variable aléatoire réelle qui admet f comme densité. Déterminer F, la fonction de répartition de X.*

3. *Soit φ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ et $Y = \varphi(X)$.*

   (a) *Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$ et déterminer sa bijection réciproque.*

   (b) *Déterminer la loi de Y.*

Exercice VI.23 (Médiane(s) d'une variable aléatoire)**.** *Soit X une variable aléatoire à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et admettant une espérance.*

1. *Justifier qu'il existe un réel m tel que $\mathbb{P}(X \leq m) = \frac{1}{2}$. Un tel réel est une médiane de X. Notons dans la suite, $\mathcal{M}(X)$, l'ensemble des médianes de la variable X.*

2. *Déterminer la ou les médianes d'une variable aléatoire X de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Est-ce que l'espérance de X est une médiane?*

3. *Dans la suite, on souhaite déterminer les réels a qui minimisent la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \varphi(a) = \mathbb{E}(|X-a|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t-a| f(t)\, dt.$$

(a) *Justifier que φ est une fonction convexe.*

(b) *On définit la fonction G sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_{-\infty}^{x} tf(t)\,dt$. Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.*

(c) *En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer φ' à l'aide de la fonction de répartition F de X.*

(d) *Conclure sur les réels qui minimisent φ.*

4. *Démontrer que l'ensemble des médianes d'une variable à densité X est un segment. (Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si pour tous $x, y \in I$, le segment $[x; y] \subset I$.)*

Exercice VI.24. *On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions f et g par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sin(2\pi \ln(x)) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\ln(x)^2/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement de variable $u = \ln(t) - n$, justifier la convergence et l'égalité*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)g(t)\,dt = 0.$$

2. *Soit $Y \sim \mathcal{N}(0; 1)$. Vérifier que $X = e^Y$ est une variable aléatoire à densité dont g est une densité.*

3. *Pour tout réel $\lambda \in]-1; 1[$, on définit la fonction $h_\lambda = (1 + \lambda f) \cdot g$. Vérifier que h_λ est une densité de probabilité.*

4. (a) *Justifier que X admet des moments à tout ordre.*

   (b) *Soit Y_λ une variable aléatoire dont une densité est donnée par h_λ. Démontrer que Y_λ admet des moments à tout ordre et :*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(Y_\lambda^n) = \mathbb{E}(X^n).$$