Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique • Mathématiques

Intégration vectorielle et équations différentielles linéaires

Mouad El Assadi

Professeur agrégé de mathématiques

Ingénieur d'État en génie civil — École Hassania des Travaux Publics (EHTP)

elassadimouad1@gmail.com

Table des matières

I Compléments d'intégration **2**
I.1 Définition et propriétés générales . . . 2
I.2 Théorème fondamental . . . 4
I.3 Formules de Taylor . . . 5

II Résolution des équations linéaires scalaires d'ordres 1 et 2 **5**
II.1 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 . . . 6
II.2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 . . . 8
II.2.1 Généralités . . . 8
II.2.2 Cas des équations différentielles à coefficients constants . . . 9
II.2.3 Cas des équations différentielles à coefficients non constants . . . 9

III Étude générale des systèmes différentiels linéaires **11**
III.1 Systèmes différentiels linéaires à coefficients continus . . . 11
III.2 Structure de l'ensemble des solutions et problème de Cauchy . . . 11
III.3 Système fondamental de solutions du système homogène et wronskien . . . 12
III.4 Solutions du système complet et méthode de variation des constantes . . . 13
III.5 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n . . . 13
III.6 Résolution effective des systèmes linéaires à coefficients constants . . . 14
III.6.1 Résolution générale du système différentiel linéaire $X' = AX + B$ . . . 15
III.6.2 Résolution de $X' = AX$ lorsque A est diagonalisable . . . 15

IV Une preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (HP) **16**
IV.1 Unicité de la solution par le lemme de Grönwall . . . 16
IV.2 Existence d'une solution définie comme limite uniforme d'une suite de Cauchy . . . 17

Ce chapitre consiste en un certain nombre de rappels concernant la résolution des équations différentielles linéaires, ainsi qu'un certain nombre de compléments. En effet, le contexte des e.v.n., et les techniques matricielles (notamment la diagonalisation et l'utilisation de l'exponentielle complexe) nous permettent d'avoir des outils efficaces pour gérer des situations bien plus générales que ce que vous avez vu en MPSI.
Les fonctions que nous considérons sont des fonctions $y : I \to E$, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et à valeurs dans un e.v.n. E de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$, égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une équation différentielle est une équation reliant les valeurs de f et de ses dérivées successives, évaluées au même point $t \in I$. Nous nous limitons dans ce chapitre à une forme bien particulière d'équations différentielles : les équations différentielles linéaires. Les autres types d'équations différentielles sont bien plus complexes à étudier, et il n'est pas toujours possible d'expliciter les solutions.
Les équations différentielles apparaissent de façon naturelle dans de nombreux contextes, en particulier en physique. Le cas linéaire est souvent suffisant, les physiciens étant des habitués de la linéarisation, donnant souvent (mais pas toujours) des approximations suffisamment précises pour être pertinentes pour la situation étudiée.

I. Compléments d'intégration

On présente dans cette section quelques rappels et compléments sur les intégrales de fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans un $\mathbb{K}$-e.v.n. F de dimension finie n (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les fonctions seront définies sur un segment $I = [a, b]$.

I.1 Définition et propriétés générales

Dans cette sous-partie, f désigne une application d'un segment I dans F. Comme dans le cas d'une application à valeurs réelles, on dit que f est continue par morceaux si I se subdivise en un nombre fini de segments sur l'intérieur desquels f est continue, et au bord desquels elle a une limite dans F.
Pour toute base B de F, on note $(f_{B,1}, \dots, f_{B,n})$ les coordonnées de f dans B, c'est-à-dire les fonctions $f_{B,i} : I \to \mathbb{K}$ telles que pour tout $t \in I$,

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_{B,i}(t) b_i.$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la base, on notera simplement f_i au lieu de $f_{B,i}$.

Proposition I.1 (Caractérisation de la continuité par morceaux via les coordonnées)**.** *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est continue par morceaux sur* I *;*

(ii) pour toute base B *de* F *et tout* $i \in [1, n]$*,* $f_{B,i}$ *est continue par morceaux ;*

(iii) il existe une base B *de* F *telle que pour tout* $i \in [1, n]$*,* $f_{B,i}$ *soit continue par morceaux.*

Éléments de preuve. Découle de la caractérisation coordonnée par coordonnée de la continuité et des limites. □

Proposition I.2 (Définition de l'intégrale vectorielle)**.** *Soit* $f : I = [a, b] \to F$ *une fonction continue par morceaux. Le vecteur*

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_{B,i}(t)\, dt \right) b_i$$

est bien défini, et indépendant du choix de la base $B = (b_1, \dots, b_n)$ *de* F*. On définit alors*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_{B,i}(t)\,dt \right) b_i,$$

la valeur commune de ces expressions. On trouve aussi les notations

$$\int_a^b f, \quad \int_{[a,b]} f(t)\,dt \quad \textit{ou} \quad \int_{[a,b]} f.$$

Éléments de preuve. Exprimer le changement de base matriciellement, et utiliser la linéarité de l'intégrale scalaire. □

En travaillant coordonnées par coordonnées, on transfère de façon quasi-immédiate une grande partie des propriétés usuelles de l'intégrale scalaire.

Proposition I.3 (Linéarités). *Soit $f, g : I \to F$ continues par morceaux sur $I = [a, b]$.*

1. *Linéarité : $\int_a^b (f + \lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$;*
2. *si $\alpha : I \to \mathbb{R}$ est c.p.m. et $u \in F$, alors $\int_a^b \alpha(t) u\,dt = \left(\int_a^b \alpha(t)\,dt \right) u$;*
3. *Pour tout $L \in \mathcal{L}(F, G)$, $\int_a^b L \circ f = L\left(\int_a^b f \right)$.*

Éléments de preuve. Le point 1 se ramène à la propriété similaire pour les fonctions scalaires, par caractérisation par les coordonnées.
Le point 2 s'obtient en choisissant une base contenant u.
Le point 3 est conséquence des 2 premiers, en travaillant encore dans une base B. On utilise d'abord la linéarité de L pour entrer L dans la somme, puis la linéarité de l'intégrale pour sortir L de l'intégrale, et encore la linéarité de L pour entrer l'intégrale dans L ! □

Proposition I.4 (Relation de Chasles). *Soit $f : I \to F$, c.p.m. sur $I = [a, b]$ et $c \in [a, b]$. Alors*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Éléments de preuve. Encore les coordonnées. □

Le point suivant se généraliserait sur des subdivisions non régulières dont le pas tend vers 0, mais seul le cas des subdivisions régulières est au programme.

Théorème I.5 (Sommes de Riemann). *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans F. Alors*

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right) \to \int_a^b f(t)\,dt.$$

Éléments de preuve. On peut voir F comme un $\mathbb{R}$-ev (même si au départ il est complexe). Se ramener au cas de fonctions à valeurs réelles en travaillant dans une $\mathbb{R}$-base. □

Théorème I.6 (Inégalité triangulaire). *On suppose que F est un $\mathbb{K}$-e.v.n. Soit $f : I = [a, b] \to F$ une application c.p.m., avec $a < b$. Alors $\|f\|_F$ est c.p.m. et*

$$\left\| \int_a^b f(x)\,dx \right\|_F \leq \int_a^b \|f(x)\|_F\,dx.$$

Éléments de preuve. Par sommes de Riemann. □

Même si l'inégalité est vraie quelle que soit la norme de F choisie, les valeurs de ces intégrales dépendent de la norme.

Remarque I.7. *1. Il faut évidemment utiliser la même norme de F dans les deux membres de l'inégalité!*

2. Attention ici à l'hypothèse $a < b$. Si $b < a$, il faut rajouter un signe pour contrer l'inversion des bornes. Ou rajouter une valeur absolue externe.

Remarque I.8. *Le cas des fonctions $f : I \to \mathbb{C}$ est déjà connu (programme de MPSI). Cependant, on peut remarquer qu'on le retrouve ici, à partir du cas $f : I \to \mathbb{R}$, en voyant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-e.v.n..*

I.2 Théorème fondamental

Pour terminer ce passage en revue rapide des intégrales vectorielles, on généralise le théorème fondamental du calcul intégral, et ses conséquences pour l'obtention de l'inégalité des accroissements finis, puis ses généralisations usuelles à des ordres de dérivation supérieure que sont les inégalités de Taylor-Lagrange. Comme dans le cas numérique, le calcul d'une intégrale se ramène au calcul de la variation d'une primitive entre les deux bornes.

Définition I.9 (Primitive de g)**.** *Soit $g, G : I \to F$. On dit que G est une primitive de g si G est dérivable sur I et $G' = g$.*

Proposition I.10 (Comparaison de deux primitives)**.** *Soit $g : I \to F$, continue sur l'intervalle I, et G_1 et G_2 deux primitives de g. Alors $G_2 - G_1$ est constante.*

Éléments de preuve. Par linéarité de la dérivation, et caractérisation des fonctions constantes. □

Théorème I.11 (Théorème fondamental de l'analyse, version vectorielle)**.** *1. Soit $g : I \to F$ une application continue sur $I = [a, b]$, et $a \in I$. Alors :*

$$G_0 : x \mapsto \int_a^x g(u)\, du$$

est une primitive de g. De plus, G_0 est alors de classe C^1.

2. Soit $g : I \to F$ et G une primitive de g. Alors

$$\int_a^b g(x)\, dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a).$$

Éléments de preuve. 1. Se ramener au cas scalaire par choix d'une base.

2. G_0 diffère de G d'une constante, donc $G(b) - G(a) = G_0(b) - G_0(a)$.

□

Voici une réexpression classique du théorème fondamental.

Corollaire I.12 (Intégrale d'une dérivée)**.** *Soit $f \in C^1(I, F)$. Alors, pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt.$$

Corollaire I.13 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit $f \in C^1(I, F)$, telle que f' soit bornée. Alors, pour tout $x \in I$,*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq |b - a| \cdot \|f'\|_\infty.$$

Les propriétés calculatoires (formule de changement de variable, formule d'intégration par parties) peuvent s'obtenir de même que dans le cas scalaire, à l'aide du théorème fondamental. Ces formules ne sont pas au programme, et seront établies en exercice seulement.
Le théorème fondamental de l'analyse permet aussi de dériver des intégrales vectorielles dépendant de façon C^1 de leur borne, en se ramenant à des dérivées de composées.

I.3 Formules de Taylor

Enfin, nous généralisons les formules de Taylor dans le cadre de fonctions d'une variable à valeurs vectorielles.

Théorème I.14 (Formule de Taylor vectorielle avec reste intégral)**.** *Soit $f \in C^{n+1}([a, b], F)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Éléments de preuve. Se ramener à la formule de Taylor scalaire appliquée aux fonctions coordonnées. On peut aussi procéder directement vectoriellement, en faisant une IPP itérée, à condition de démontrer d'abord la formule d'IPP vectorielle (voir exercices). □

Remarque I.15. *Cette formule ne nécessite pas d'hypothèse $a < b$. Elle reste valide lorsque $b \leq a$.*

On en déduit, comme dans le cas scalaire :

Théorème I.16 (Inégalité de Taylor-Lagrange vectorielle)**.** *Soit $a < b$, et f une fonction de classe C^{n+1} sur $[a, b]$, à valeurs dans F. Alors $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[a, b]$, et*

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} \right\| \leq \|f^{(n+1)}\|_\infty \cdot \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En pratique, on cherchera explicitement à majorer $\|f^{(n+1)}\|$ par M, pour obtenir :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} \right\| \leq M \cdot \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Enfin, la formule de Taylor-Young passe aussi au cas vectoriel.

Théorème I.17 (Formule de Taylor-Young à l'ordre n au point x_0)**.** *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, et $f : I \to F$ une fonction de classe C^n au voisinage de x_0. Alors :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Éléments de preuve. Coordonnée par coordonnée, les dérivées à tout ordre et les o se caractérisant bien ainsi. □

II. Résolution des équations linéaires scalaires d'ordres 1 et 2

Cette première partie reprend et complète l'étude des équations différentielles menée en première année

II.1 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

Commençons par exprimer les solutions des équations dites résolues, c'est-à-dire celles qui s'écrivent, sur un intervalle I, sous la forme $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$. On suppose les fonctions $a, b : I \to \mathbb{R}$ continues sur I.

Théorème II.1. *Soit A une primitive de a supposée continue sur l'intervalle I.*

- *L'équation homogène $y' = a(t)y$ admet pour solution générale $t \mapsto \lambda e^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.*
- *L'équation $y' = a(t)y + b(t)$ admet pour solution générale $t \mapsto y_p(t) + \lambda e^{A(t)}$ où y_p est une solution particulière de l'équation complète.*

Éléments de preuve.

- Résolution de l'équation homogène par la méthode du facteur intégrant
  Soit y une solution sur I de l'équation $y'(t) - a(t)y(t) = 0$. Posons alors $\phi(t) = y(t)e^{-A(t)}$. ϕ est dérivable et $\phi'(t) = (y'(t) - a(t)y(t))e^{-A(t)} = 0$. ϕ est constante sur l'intervalle I et donc :

  $$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall t \in I, \quad y(t) = \lambda e^{A(t)}$$

  Réciproquement, toute fonction de cette forme est bien solution de l'équation.

- Résolution de l'équation complète par la méthode de variation de la constante
  On recherche les solutions sous la forme $y(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$. Soit $t_0 \in I$.

  $$\begin{aligned} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) &\iff \lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)} \\ &\iff \lambda(t) = \int_{t_0}^{t} b(x)e^{-A(x)}dx + \lambda(t_0) \\ &\iff y(t) = \lambda(t_0)e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} b(x)e^{-A(x)}dx \end{aligned}$$

  La fonction y est bien la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière (dont on a même donné une forme explicite).

□

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante et l'équation homogène associée :

$$a(t)y' + b(t)y = c(t) \quad (E) \quad \text{et} \quad a(t)y' + b(t)y = 0 \quad (H)$$

On suppose $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ continues sur l'intervalle I. On déduit du théorème précédent les deux résultats fondamentaux suivants.

Corollaire II.2 (Structure de l'ensemble des solutions)**.** *Lorsque $a : I \to \mathbb{K}$ ne s'annule pas sur l'intervalle I,*

- *l'ensemble S_H des solutions de (H) est une droite vectorielle;*
- *l'ensemble S_E des solutions de (E) est une droite affine de direction S_H.*

Point vocabulaire : on dira « Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions (de la forme) $t \to \ldots$ ».

Corollaire II.3 (Problème de Cauchy)**.** *Si a ne s'annule pas sur l'intervalle I, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

L'interprétation graphique est immédiate : par un point donné, passe une et une seule trajectoire. Autrement dit, les courbes représentatives de deux solutions ne peuvent s'intersecter. Si en revanche, a s'annule, tout est possible!
On notera en particulier que toute solution d'une équation différentielle de la forme $y'(t) + b(t)y(t) = 0$ qui s'annule une fois sur un intervalle donné y est « obligatoirement » entièrement nulle!

Plan de résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre :

1. Identification de l'équation.
2. Mise sous forme résolue (ou normalisée) en divisant par $a(t)$ sur les intervalles où a ne s'annule pas.
   Ex: $ty' - t^2y + \sin t = 0$. On résout l'équation $y' - ty + \frac{\sin t}{t} = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. Résolution de l'équation homogène: $y' = f(t)y$ avec f continue sur l'intervalle de résolution I.
   La solution générale de l'équation homogène est $t \mapsto \lambda e^{F(t)}$ où F est une primitive de f sur I et $\lambda \in \mathbb{K}$.
4. Résolution de l'équation avec second membre.
   On recherche pour cela une solution particulière y_p de (E). S'il n'y a pas de solution évidente, on utilise la méthode de la variation de la constante en cherchant y sous la forme $y(t) = \lambda(t)e^{F(t)}$. En injectant l'expression dans l'équation, on obtient une expression de λ' que l'on peut (bien souvent) primitiver. La solution générale de l'équation (E) est $y : t \mapsto \lambda e^{F(t)} + y_p(t)$.
   Ex: Résoudre $y' - xy = x$ en cherchant une solution particulière de deux façons différentes.
5. Raccordement éventuel des solutions.
   Ex: $y' + a(x)y = b(x)$ avec y_1 solution sur $\mathbb{R}_-^*$ et y_2 solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
   La fonction $y \mapsto \begin{cases} y_1(x) \text{ si } x < 0 \\ y_2(x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$ est solution de l'équation sur $\mathbb{R}_*$. Elle est solution sur $\mathbb{R}$ si elle est prolongeable par continuité en une fonction dérivable, voire de classe $\mathcal{C}^1$ auquel cas :
   $$\lim_{x\to 0^-} y_1(x) = \lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^-} y(x) = \lim_{x\to 0^+} y_2(x)$$
   $$\lim_{x\to 0^-} y_1'(x) = \lim_{x\to 0^+} y'(x) = \lim_{x\to 0^-} y'(x) = \lim_{x\to 0^+} y_2'(x)$$
6. Utilisation des conditions initiales.

Exemple II.4. *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(\mathcal{E})$: $ty' + |t|y = t^2e^{-|t|}$.*

- *Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$*

$$(\mathcal{E}) \iff ty' + ty = t^2e^{-t} \iff y' + y = te^{-t}$$

On trouve $y(t) = \left(\frac{t^2}{2} + C_1\right)e^{-t}$ *où* $C_1 \in \mathbb{R}$.

- *Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}_-^*$*

$$(\mathcal{E}) \iff ty' - ty = t^2e^{t} \iff y' - y = te^{t}$$

On trouve $y(t) = \left(\frac{t^2}{2} + C_2\right)e^{t}$ *où* $C_2 \in \mathbb{R}$.

- *Recollement des solutions*

  Supposons que y soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(\mathcal{E})$. L'application y est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^*, y(t) = \begin{cases} \left(\frac{t^2}{2} + C_1\right) e^{-t} \text{ si } t > 0 \\ \left(\frac{t^2}{2} + C_2\right) e^{t} \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

  Cela donne a priori de très nombreuses solutions! On peut en visualiser certaines sur le graphe ci-contre.

  y est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et le sera sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle admet un DL à l'ordre 1 en 0.

$$y(t) = C_1 - C_1 t + o(t) = C_2 + C_2 t + o(t)$$

  Par unicité du DL, on trouve $C_1 = C_2 = 0$. Il y a donc une unique solution dérivable sur $\mathbb{R}$.

II.2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

II.2.1 Généralités

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 suivante et l'équation homogène associée :

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \quad (E) \quad \text{et} \quad a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \quad (H)$$

On suppose $a, b, c, d : I \to \mathbb{K}$ continues sur un intervalle I. Les résultats suivants sont provisoirement admis.

Théorème II.5 (Problème de Cauchy)**.** *Si a ne s'annule pas sur l'intervalle I, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \\ y(t_0) = y_0; \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

Théorème II.6 (Structure de l'ensemble des solutions)**.** *Lorsque $a : I \to \mathbb{K}$ ne s'annule pas sur l'intervalle I,*

- *l'ensemble S_H des solutions de (H) est un plan vectoriel;*
- *l'ensemble S_E des solutions de (E) est un plan affine de direction S_H.*

Le plan de résolution d'une équation linéaire du second ordre ne diffère pas de celui du premier ordre.

Proposition II.7 (Principe de superposition)**.** *Si y_1 est solution de l'équation $ay'' + by' + cy = d_1(t)$ et y_2 de l'équation $ay'' + by' + cy = d_2(t)$ alors $y_1 + y_2$ est solution de l'équation $ay'' + by' + cy = d_1(t) + d_2(t)$.*

II.2.2 Cas des équations différentielles à coefficients constants

On suppose ici que les fonctions a, b et c sont constantes réelles avec $a \neq 0$. (E) s'écrit sous la forme :

$$ay'' + by' + cy = d(t) \quad (E)$$

Théorème II.8 (Cas de l'équation homogène à coefficients constants)**.** *Soient l'équation* $ay'' + by' + cy = 0$ *et* Δ *le discriminant de l'équation caractéristique* $ar^2 + br + c = 0$.

- *Si* $\Delta > 0$*, on note* r_1 *et* r_2 *les deux racines réelles distinctes. Les solutions sont de la forme :*

$$y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \quad \textit{avec} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

- *Si* $\Delta = 0$*, on note* r *la racine réelle double. Les solutions sont de la forme :*

$$y(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 t)e^{rt} \quad \textit{avec} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

- *Si* $\Delta < 0$*, on note* $\alpha \pm i\beta$ *les deux racines complexes conjuguées. Les solutions sont de la forme :*

$$y(t) = (\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t))e^{\alpha t} \quad \textit{avec} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Exercice II.9. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

$$y'' + 3y' + 2y = 0; \quad y'' - 2y' + y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

Comme dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1, l'ensemble des solutions de l'équation $ay'' + by' + cy = d(t)$ est obtenu en recherchant une solution particulière de cette équation.
On est régulièrement appelé à déterminer une solution particulière lorsque le 2nd membre est de la forme :

- $d(t) = P(t)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$.
  On cherche une solution sous la forme d'un polynôme Q de même degré que P. Ex. : $y'' - 2y' + y = t^2$.

- $d(t) = P(t)e^{mt}$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$.
  On cherche une solution sous la forme $Q(t)e^{mt}$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(Q) = \deg(P) + k$, k étant l'ordre de multiplicité de m en tant que racine de l'équation caractéristique.

- $d(t) = \cos(\omega t)$ ou $d(t) = \sin(\omega t)$, on passe en complexe et on retrouve le cas précédent.

II.2.3 Cas des équations différentielles à coefficients non constants

Lorsque l'équation n'est pas à coefficients constants, il n'y a pas de méthode de résolution systématique. Voici cependant quelques techniques à connaître. On se laissera guider par l'énoncé dans la plupart des cas.

Recherche de solutions à l'aide de séries entières

Exemple II.10. *Résolvons l'équation* $(x^2+x)y''+(3x+1)y'+y=0$ *en posant* $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ *puis en dérivant terme à terme la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence (inconnu pour le moment). En injectant dans l'équation,*

$$\begin{aligned}&\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{+\infty}3na_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0\\ \iff&\sum_{n=0}^{+\infty}[n(n-1)a_n+(n+1)na_{n+1}+3na_n+(n+1)a_{n+1}+a_n]x^n=0\\ \iff&\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^2(a_{n+1}+a_n)x^n=0\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, il vient $a_{n+1}=-a_n$ *quel que soit* $n\in\mathbb{N}$*. On trouve alors* $a_n=(-1)^na_0$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *et,*

$$\forall x\in]-1,1[,\quad y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_0(-x)^n=\frac{a_0}{1+x}$$

Les solutions déterminées seront alors définies sur un intervalle centré en 0. Toutes les solutions de l'équation n'étant pas nécessairement développables en série entière, il se peut que l'on obtienne seulement une partie des solutions. Dans l'exemple précédent, les solutions développables en série entière forment une droite vectorielle alors que l'espace vectoriel formé des solutions sur $]0,1[$ *est de dimension 2.*

Recherche de solutions de type polynomiales On pourra commencer par rechercher le degré d'une fonction polynomiale éventuellement solution, des conditions sur son coefficient dominant, sur ses racines...

Exemple II.11. *Considérons l'équation différentielle* $x(x+1)y''+(x+2)y'-y=0$ *et cherchons une solution polynomiale de la forme* $P(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ *où* $n=\deg(P)$*, c'est-à-dire* $a_n\neq 0$*. Si* $n>0$*, le terme dominant de* $x(x+1)P''(x)+(x+2)P'(x)-P(x)$ *est* $(n^2-1)a_nx^n$*, donc* $n\leq 1$*. On peut donc poser* $P(x)=ax+b$ *et en injectant dans l'équation trouver* $b=2a$*, c'est-à-dire* $P(x)=a(x+2)$*.*

Factorisation par une solution déjà connue (méthode dite de Lagrange) Cette technique n'est rien d'autre qu'une adaptation de la méthode de variation de la constante. Si on connaît une solution y_0 de l'équation différentielle, on peut chercher une solution sous la forme $y=y_0z$. Une telle écriture nous ramène alors à la résolution d'une équation différentielle dont l'ordre est abaissé.

Exemple II.12. *Reprenons l'exemple de l'équation différentielle* $x(x+1)y''+(x+2)y'-y=0$*. Posons* $y(x)=(x+2)z(x)$*.*

$$\begin{aligned}x(x+1)y''+(x+2)y'-y=0&\iff x(x+1)(x+2)z''(x)=-(3x^2+6x+4)z'(x)\\&\iff x(x+1)(x+2)z'(x)=-(3x^2+6x+4)z(x)\end{aligned}$$

en notant $Z(x)=z'(x)$*. Z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la forme :*

$$Z'(x)=\left(-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}\right)Z(x)$$

Ainsi, $Z(x) = A \cdot \dfrac{x+1}{(x+2)^2x^2} = \dfrac{A}{4}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+2)^2}\right)$, *et donc,*

$$z(x) = B\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}\right) + C \text{ avec } A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Enfin, $y(x) = \dfrac{A''}{x} + B(x+2)$ *avec* $A'', B \in \mathbb{R}$. *On a obtenu l'ensemble des solutions sur* $\mathbb{R}_+^*$ *(et non* $\mathbb{R}^*$*).*

Changements de variable et d'inconnue (en principe fournis par l'énoncé)

Exercice II.13. *Résoudre sur* $\mathbb{R}_+$ *l'équation différentielle* $x^2y'' + y = 0$ *en posant* $t = \ln(x)$.

III. Étude générale des systèmes différentiels linéaires

III.1 Systèmes différentiels linéaires à coefficients continus

Un système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 est un système de la forme :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

On peut alors le mettre sous la forme $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ avec :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K}^n); \quad A : t \mapsto \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{F}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K})); \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K}^n)$$

On suppose par la suite que les fonctions vectorielles A et B sont continues sur l'intervalle I.

Exemple III.1.

$\begin{cases} x' = 3\cos(t)x - y + 2 \\ y' = x + ty - t^2 \end{cases}$ *peut s'écrire* $X' = AX + B$ *avec* $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A(t) = \begin{bmatrix} 3\cos(t) & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix}$ *et* $B(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ -t^2 \end{bmatrix}$.

On appelle solution du système différentiel linéaire $X' = AX + B$ toute fonction vectorielle $u \in \mathcal{F}^1(I, \mathbb{R}^n)$ vérifiant $u'(t) = A(t)u(t) + B(t)$ sur l'intervalle I.
On peut écrire le système $X' = AX + B$ sous une forme vectorielle, moins commode que la forme matricielle :

$$x' = a(t)(x) + b(t) \quad \text{avec} \quad a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E)) \quad \text{et} \quad b \in \mathcal{C}(I, E)$$

III.2 Structure de l'ensemble des solutions et problème de Cauchy

À l'exception de quelques cas particuliers comme les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants (cf. section suivante) ou les équations scalaires d'ordre 1 (cf. section précédente), il n'est pas possible de résoudre de manière générale un système en explicitant ses solutions. Cela n'empêche nullement d'établir l'existence de telles solutions, leur éventuelle unicité si l'on rajoute des contraintes, et plus généralement leurs propriétés.

Théorème III.2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire)**.** *Lorsque* $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $B : I \to \mathbb{K}^n$ *sont continues sur l'intervalle* I*,*

- *l'ensemble S_H des solutions de $X' = A(t)X$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de dimension n ;*
- *l'ensemble des solutions de $X' = A(t)X + B(t)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de direction S_H.*

La démonstration de ce résultat phare est hors programme mais une preuve figure à la fin de ce cours.

Exemple III.3. *Si X est une solution de l'équation homogène $X'(t) = A(t)X(t)$ avec $A \in \mathcal{F}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$,*

$$\exists t_0 \in I, \quad X(t_0) = 0 \iff \forall t \in I, \quad X(t) = 0$$

Éléments de preuve. • Cas du système homogène

La fonction nulle (à valeurs dans $\mathbb{K}^n$) est évidemment solution du système et si X_1 et X_2 sont deux solutions, λ un scalaire, alors $\lambda X_1 + X_2$ est encore solution :

$$A(\lambda X_1 + X_2) = \lambda A X_1 + A X_2 = \lambda X_1' + X_2' = (\lambda X_1 + X_2)'$$

Pour tout $t_0 \in I$, l'application $X \to X(t_0)$ établit un isomorphisme entre S_H et $\mathbb{K}^n$ en vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. S_H est donc un espace vectoriel de dimension n.

- Cas du système avec second membre

Supposons que X_p soit une solution particulière du système différentiel $X' = AX + B$.

$$\begin{aligned} \tilde{X} \text{ solution du système complet} &\iff \tilde{X}' = A\tilde{X} + B \\ &\iff \tilde{X}' = A\tilde{X} + (X_p' - AX_p) \\ &\iff (\tilde{X} - X_p)' = A(\tilde{X} - X_p) \\ &\iff \tilde{X} - X_p \text{ solution du système homogène} \end{aligned}$$

X est bien la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène.

□

III.3 Système fondamental de solutions du système homogène et wronskien

Toute solution du système homogène à coefficients continus $X' = A(t)X$ s'écrit comme combinaison linéaire d'une base $(X_1, \dots, X_n)$ de l'espace des solutions. Cette base est qualifiée de système fondamental de solutions.

Théorème III.4. *Soient $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ continue sur l'intervalle I et $X_1, \dots, X_n$ des solutions du système $X' = A(t)X$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(X_1, \dots, X_n)$ est un système fondamental de solutions ;

(ii) pour tout $t \in I$, $(X_1(t), \dots, X_n(t))$ est une base de $\mathbb{K}^n$;

(iii) il existe $t_0 \in I$ tel que $(X_1(t_0), \dots, X_n(t_0))$ soit une base de $\mathbb{K}^n$.

Éléments de preuve. Ce résultat est une nouvelle conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz en considérant, pour tout $t \in I$, l'isomorphisme :

$$\varphi_t : S_H \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad X \longmapsto X(t)$$

L'image d'une base de solutions (donc d'un système fondamental) par φ_t est une base de $\mathbb{K}^n$. □

Même si nous en aurons un usage essentiellement limité aux équations linéaires d'ordre 2, le wronskien est un outil commode pour déterminer si une famille de solutions forme un système fondamental.

Définition III.5 (Wronskien)**.** *On appelle wronskien d'une famille de solutions $(X_1, \dots, X_n)$ du système $X' = A(t)X$, l'application :*

$$W : t \mapsto \det(X_1(t), \dots, X_n(t))$$

D'après ce qui précède,

$$(X_1, \dots, X_n) \text{ est un système fondamental} \iff \forall t \in I, W(t) \neq 0 \iff \exists t_0 \in I, W(t_0) \neq 0$$

III.4 Solutions du système complet et méthode de variation des constantes

Revenons au système différentiel à coefficients continus $X' = A(t)X + B(t)$ avec $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B(t) \in \mathbb{K}^n$.
Supposons connu un système fondamental $(X_1, \dots, X_n)$ de solutions de l'équation homogène. Toute solution de l'équation homogène s'écrit ainsi sous la forme :

$$X(t) = \lambda_1 X_1(t) + \cdots + \lambda_n X_n(t) \quad \text{où} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$$

On cherche désormais les solutions de l'équation complète sous la forme $X(t) = \lambda_1(t)X_1(t) + \cdots + \lambda_n(t)X_n(t)$ où les fonctions λ_i sont supposées dérivables sur l'intervalle de résolution I.

$$X' = A(t)X + B(t) \iff \lambda_1'(t)X_1(t) + \cdots + \lambda_n'(t)X_n(t) = B(t)$$

Pour t fixé, les coefficients $\lambda_1'(t), \dots, \lambda_n'(t)$ s'interprètent alors comme les coordonnées du vecteur $B(t)$ dans la base $(X_1(t), \dots, X_n(t))$.
Ainsi, si l'on connaît un système fondamental de solutions de l'équation homogène (ce qui n'est pas acquis!), on peut résoudre l'équation complète en déterminant les fonctions λ_i par primitivation directe des coordonnées de B. En pratique, les calculs sont néanmoins vite pénibles et nous n'en n'abuserons pas...

III.5 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n

L'étude des systèmes différentiels est en partie motivée par le fait que toute équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n se ramène, au moyen de l'équivalence suivante, à un système différentiel linéaire d'ordre 1 :

$$x^{(n)} = a_0 x + a_1 x' + \cdots + a_{n-1}x^{(n-1)} \iff X' = AX \text{ avec } X = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix} \text{ et } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

La matrice A est parfois appelée matrice compagnon du système homogène $X' = A(t)X$. Sous réserve de continuité de A, c'est-à-dire lorsque les fonctions $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont continues,

- les solutions de l'équation $X' = AX$ sur un intervalle donné forment un espace vectoriel de dimension n.

- le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)} = a_0(t)x + a_1(t)x' + \cdots + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} \\ x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \ldots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$$

admet une et une seule solution.

$$\exists t_0 \in I, \quad W(t_0) = \begin{vmatrix} x_1(t_0) & \cdots & x_n(t_0) \\ x_1'(t_0) & \cdots & x_n'(t_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Exemple III.6. $(\cos \circ \ln, \sin \circ \ln)$ *est un système fondamental de solutions sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de* $t^2y''+ty'+y=0$ *puisque les deux fonctions sont (avant tout!) bien solutions et, par exemple,* $W(1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

On retrouve aisément le résultat précédent en vérifiant que le wronskien est solution d'une certaine équation différentielle linéaire d'ordre 1. Par multilinéarité du déterminant, si x_1 et x_2 sont deux solutions sur I de l'équation différentielle $x'' = a_0(t)x + a_1(t)x'$ et $t \in I$,

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} \quad \text{donc} \quad W'(t) = \begin{vmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) \\ x_1''(t) & x_2''(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1''(t) & x_2''(t) \end{vmatrix} = a_1(t) \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$

Ainsi, $W'(t) = a_1(t)W(t)$. La preuve se généralise facilement pour une équation différentielle d'ordre n :

$$W'(t) = a_{n-1}W(t) \quad \text{soit} \quad W(t) = \lambda \exp\left(\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(u)\,du\right) = \lambda \exp\left(\int_{t_0}^{t} (A(u))\,du\right) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

D'où le fait que W est nul sur I ou bien ne s'annule jamais.
La méthode de variation des constantes permet, une fois connu un système fondamental de solutions, de résoudre l'équation différentielle avec second membre $x^{(n)} = a_0(t)x + a_1(t)x' + \cdots + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + b(t)$. Explicitons le cas particulier des équations différentielles d'ordre 2 de la forme $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, seul cas à connaître. Cette dernière équation se réécrit sous la forme :

$$X' = A(t)X + B(t) \quad \text{avec} \quad X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ c(t) \end{bmatrix}$$

Si (x_1, x_2) est un système fondamental de solutions de l'équation d'ordre 2, d'après ce qui précède,

$$\lambda_1'(t)X_1(t) + \lambda_2'(t)X_2(t) = B(t) \iff \begin{cases} \lambda_1'(t)x_1(t) + \lambda_2'(t)x_2(t) = 0 \\ \lambda_1'(t)x_1'(t) + \lambda_2'(t)x_2'(t) = c(t) \end{cases}$$

Connaissant $x_1(t)$ et $x_2(t)$, il s'agit alors de résoudre un système linéaire avant de primitiver.

Exercice III.7. 1. *Résoudre l'équation différentielle* $y''(t)+y(t) = \tan(t)$ *sur l'intervalle* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2. *Donner une expression intégrale des solutions de l'équation* $y''(t) + y(t) = f(t)$ *où* $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

III.6 Résolution effective des systèmes linéaires à coefficients constants

On restreint désormais notre étude aux systèmes différentiels linéaires à coefficients constants, pour lesquels nous sommes en mesure d'expliciter les solutions à l'aide de l'exponentielle matricielle.

III.6.1 Résolution générale du système différentiel linéaire $X' = AX + B$

Théorème III.8. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'équation homogène $X' = AX$ admet pour solution générale $X : t \mapsto e^{tA}C$ où $C \in \mathbb{K}^n$.*
On rappelle que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(M)$ est inversible, d'inverse $\exp(-M)$.

Éléments de preuve. Il suffit de dériver $\phi : t \mapsto e^{-tA}X(t)$ sur l'intervalle I. $\phi'(t) = e^{-tA}(X'(t) - AX(t)) = 0$, d'où le résultat.
Le problème de Cauchy $X'(t) = AX(t)$ et $X(t_0) = X_0$ admet comme unique solution $X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0$. □

On peut facilement en déduire l'unique solution de l'équation complète $X' = AX + B$ en faisant varier la constante (l'expression n'est pas à retenir) :

$$X'(t) = AX(t)+B(t) \iff e^{tA}C'(t) = B(t) \iff C(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)\,ds+C(t_0) \iff X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0+e^{tA}$$

III.6.2 Résolution de $X' = AX$ lorsque A est diagonalisable

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Les solutions de l'équation homogène $X' = AX$ sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \exp(tA)C \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{K}^n$$

En notant $(X_1, \dots, X_n)$ une base de vecteurs propres de A, on peut écrire $C = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$ avec $C_i \in \mathbb{K}$. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \exp(tA)X_i = \sum_{i=1}^{n} C_i \exp(\lambda_i t)X_i$$

On vient d'établir LE résultat que l'on utilisera en pratique pour résoudre un système différentiel à coefficients constants dans le cas diagonalisable :

Théorème III.9. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. Il existe alors une base $(X_1, \dots, X_n)$ de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, éventuellement multiples.*
Les solutions de l'équation $X' = AX$ sont de la forme :

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}X_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}X_n \quad \textit{avec} \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}$$

On peut retrouver ce résultat rapidement, sans recours à l'exponentielle de matrices, comme on l'a fait dans le premier chapitre de réduction :

$$X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \iff Y' = DY \text{ avec } Y = P^{-1}X$$

Ainsi, pour tout $i \in [1, n]$, $y_i'(t) = \lambda_i y_i(t)$ donc $y_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}$ avec $C_i \in \mathbb{R}$. D'où le résultat suivant :

$$X(t) = PY(t) = P \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t}X_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}X_n$$

On notera l'inutilité de calculer $\exp(tA)$. Cela reste vrai dans le cas où la matrice serait (seulement) trigonalisable. On se reportera au premier chapitre de réduction pour les détails pratiques.

IV. Une preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (HP)

Par la suite, I désignera à nouveau un intervalle et $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ deux applications continues sur I. On cherche à prouver l'existence et l'unicité de la solution, pour tous $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, au problème de Cauchy linéaire :

$$\forall t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad \text{et} \quad X(t_0) = X_0 \quad (*)$$

Une preuve classique consiste à travailler avec la formulation intégrale du problème (qui lui est équivalente) :

$$\forall t \in I, \quad X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} (A(u)X(u) + B(u))\, du \quad (**)$$

Nous munissons $\mathbb{K}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$ et introduisons sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la norme subordonnée associée, notée $\|\cdot\|$.

IV.1 Unicité de la solution par le lemme de Grönwall

Commençons par énoncer une inégalité centrale dans la justification de l'unicité de la solution.

Lemme IV.1 (Inégalité de Grönwall)**.** *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ supposées continues.*
Supposons de plus que g est positive et que pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$, $f(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} f(u)g(u)\, du$.
Alors, pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$, $f(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(u)\, du\right)$.

Éléments de preuve. Il suffit de prouver que $f(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(u)\, du\right) \leq \left(a + \int_{t_0}^{t} f(u)g(u)\, du\right)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(u)\, du\right)$ a.
Posons pour cela : $\forall t \in I, \quad \varphi(t) = \left(a + \int_{t_0}^{t} f(u)g(u)\, du\right)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(u)\, du\right)$.
L'application φ est dérivable sur I et pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$,

$$\varphi'(t) = \underbrace{\left[f(t) - \left(a + \int_{t_0}^{t} f(u)g(u)\, du\right)\right]}_{\leq 0} \times \underbrace{g(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(u)\, du\right)}_{\geq 0} \leq 0$$

L'application φ étant décroissante, $\varphi(t) \leq \varphi(t_0) = a$ pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$. □

On adapte alors cette dernière démonstration pour justifier la variante symétrisée de l'inégalité de Grönwall :

$$\left[\forall t \in I, \quad f(t) \leq a + \left|\int_{t_0}^{t} f(u)g(u)\, du\right|\right] \implies \left[\forall t \in I, \quad f(t) \leq a\exp\left(\left|\int_{t_0}^{t} g(u)\, du\right|\right)\right]$$

Considérons maintenant deux solutions X_1 et X_2 au problème de Cauchy intégral $(**)$. $X_1(t_0) = X_2(t_0)$ donc :

$$\forall t \in I, \quad X_2(t) - X_1(t) = \int_{t_0}^{t} A(u)(X_2(u) - X_1(u))\, du$$

Par inégalité triangulaire, pour tout $t \in I$, $\|X_2(t) - X_1(t)\| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \|A(u)\| \cdot \|X_2(u) - X_1(u)\|\, du\right|$.
Les applications $f = \|X_2 - X_1\|$ et $g = \|A\|$ sont de plus continues et positive pour la seconde. Les conditions d'application du lemme de Grönwall étant réunies, on obtient pour $a = 0$, $\|X_2(t) - X_1(t)\| \leq 0$ pour tout $t \in I$. Nous venons d'établir l'égalité $X_1 = X_2$, c'est-à-dire l'unicité de la solution.

IV.2 Existence d'une solution définie comme limite uniforme d'une suite de Cauchy

On cherche à construire une application X vérifiant $X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t}(A(u)X(u) + B(u))\,du$ pour tout $t \in I$. Introduisons pour cela la suite vectorielle de fonctions définies sur I par :

$$\forall t \in I, \quad X_0(t) = X(t_0), \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1}(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t}(A(u)X_k(u) + B(u))\,du$$

Une simple récurrence montre que $X_k \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Nous allons prouver que cette suite de fonctions $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la solution X recherchée en travaillant d'abord sur un intervalle I compact, de la forme $[t_0 - a, t_0 + b]$, où $a, b \geq 0$. On munit donc $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$ de la norme de convergence uniforme définie par $\|Y\|_\infty = \sup_{t\in I}\|Y(t)\|$, cette dernière étant parfaitement définie compte tenu de la compacité de I.

Théorème IV.2. *La suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une solution du problème de Cauchy intégral $(**)$.*

Éléments de preuve.

- Étape 1 – On commence par prouver que l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n), \|\cdot\|_\infty)$ est complet, i.e. que toute suite de Cauchy converge. Soit en effet $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geq N, \quad \|Y_p - Y_q\|_\infty \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq N$ et $t \in I = [t_0 - a, t_0 + b]$, $\|Y_p(t) - Y_q(t)\| \leq \varepsilon$. La suite $(Y_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{K}^n$ donc elle converge vers un vecteur noté $Y(t)$, ce qui assure la convergence simple de la suite de fonctions $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$. De plus, en faisant tendre q vers $+\infty$,

$$\forall p \geq N, \quad \forall t \in [t_0 - a, t_0 + b], \quad \|Y_p(t) - Y(t)\| \leq \varepsilon \quad \text{soit} \quad \|Y_p - Y\|_\infty \leq \varepsilon$$

La suite $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément sur I vers Y, qui est de ce fait une fonction continue.

- Étape 2 – On montre que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy en établissant au préalable par récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in I, \quad \|X_p(t) - X_{p-1}(t)\| \leq \frac{\lambda C^{p-1}|t - t_0|^p}{p!}$$

où l'on a noté $\lambda = \|AX_0 + B\|_\infty$ et $C = \sup_{u\in I}\|A(u)\|$, cette dernière quantité étant définie par continuité de $\|A\|$ sur le compact I. L'initialisation est chose aisée :

$$\forall t \in I, \quad \|X_1(t) - X_0(t)\| \leq \left|\int_{t_0}^{t}\|A(u)X_0 + B(u)\|\,du\right| \leq \lambda|t - t_0|$$

Supposons le résultat établi au rang p et prouvons-le au rang $p + 1$.

$$\forall t \in I, \quad \|X_{p+1}(t) - X_p(t)\| \leq \left|\int_{t_0}^{t}\|A(u)\| \cdot \|X_p(u) - X_{p-1}(u)\|\,du\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t}\frac{\lambda C^p|u - t_0|^p}{p!}\,du\right|$$

Donc pour tout $t \in I$, $\|X_{p+1}(t) - X_p(t)\| \leq \frac{\lambda C^p|t-t_0|^{p+1}}{(p+1)!}$ (ce qu'on voulait!). Or $I = [t_0 - a, t_0 + b]$, donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \|X_p - X_{p-1}\|_\infty \leq \frac{\lambda C^{p-1} \max(a,b)^p}{p!}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ où $p \geq q$, par inégalité triangulaire,

$$\|X_p - X_q\|_\infty \leq \sum_{k=q+1}^{p} \|X_k - X_{k-1}\|_\infty \leq \lambda \sum_{k=q+1}^{p} \frac{C^{k-1} \max(a,b)^k}{k!} \leq \lambda \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{C^{k-1} \max(a,b)^k}{k!}$$

Cette dernière somme est le reste d'une série convergente (série exponentielle) donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p \geq q \geq N$, $\|X_p - X_q\|_\infty \leq \varepsilon$.

- Étape 3 – La suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, elle converge dans $(\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n), \|\cdot\|_\infty)$ vers $X \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$.

  La convergence uniforme assure le passage à la limite sous l'intégrale dans la relation de récurrence :

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} (A(u)X(u) + B(u))\, du, \quad X \text{ est solution sur } I = [t_0 - a, t_0 + b].$$

□

Lorsque I est un intervalle quelconque, on construit une solution en considérant pour tout segment contenant t_0 l'unique solution du problème de Cauchy sur ce segment. Une telle définition fait sens puisque si $J, J' \subset I$ sont deux segments contenant t_0, la solution sera unique sur $J \cap J'$.