Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique • Mathématiques

Fonctions vectorielles

Mouad El Assadi

Professeur agrégé de mathématiques

Ingénieur d'État en génie civil — École Hassania des Travaux Publics (EHTP)

elassadimouad1@gmail.com

Table des matières

I Limite et continuité d'une fonction vectorielle **2**

II Dérivabilité d'une fonction vectorielle **2**
II.1 Dérivation en un point et sur un intervalle 2
II.2 Opérations sur les fonctions dérivables 3
II.3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ 4

III Intégration d'une fonction vectorielle sur un segment **4**
III.1 Définition et premières propriétés 4
III.2 Intégrale fonction de sa borne supérieure 5
III.3 Formules de Taylor 5

IV Suites et séries de fonctions vectorielles **5**

V Théorèmes d'intégration sur un intervalle quelconque pour les fonctions vectorielles (HP) **7**

VI Exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice **9**

On appelle *fonction vectorielle d'une variable réelle* toute fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie. En pratique, on considérera souvent des fonctions à valeurs dans $E = \mathbb{R}^p$, donc des fonctions de la forme :

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}^p, \quad t \longmapsto (f_1(t), \ldots, f_p(t)).$$

Les fonctions numériques $f_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ pour $i \in \{1, \ldots, p\}$ sont appelées *fonctions composantes* ou *fonctions coordonnées* de f. Plus généralement, si E est un espace vectoriel normé de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$, $f = f_1 e_1 + \cdots + f_p e_p$. L'équivalence des normes en dimension finie nous assurera que les propriétés de régularité (comme la continuité et la dérivabilité) ne dépendent pas de la base choisie. Dans tout ce chapitre, f désignera une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie p.

I. Limite et continuité d'une fonction vectorielle

Définition I.1 (Limite). *On dit que f admet $\ell \in E$ pour limite en $t_0 \in I$ si $\lim_{t\to t_0} \|f(t) - \ell\| = 0$, c'est-à-dire si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall t \in I, \quad |t - t_0| < \eta \Longrightarrow \|f(t) - \ell\| < \varepsilon.$$

On peut montrer que lorsque la limite existe, elle est unique. De plus, si $E = \mathbb{R}^p$, f admet $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p) \in \mathbb{R}^p$ pour limite en $t_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si chaque fonction composante f_i admet ℓ_i comme limite en t_0.

Définition I.2 (Continuité).

- *f est dite continue en $t_0 \in I$ si $\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0)$, c'est-à-dire si :*
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall t \in I, \quad |t - t_0| < \eta \Longrightarrow \|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon.$$
- *On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.*

Proposition I.3 (Continuité et fonctions composantes). *f est continue en $t_0 \in I$ si et seulement si f_i est continue en t_0 quel que soit $i \in \{1, \ldots, p\}$.*

Exemple I.4. *L'application $t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car chacune des fonctions composantes l'est.*

II. Dérivabilité d'une fonction vectorielle

II.1 Dérivation en un point et sur un intervalle

Définition II.1 (Dérivabilité).

- *L'application f est dite dérivable en $t_0 \in I$ si $\lim_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ existe. On appelle alors* vecteur dérivé en t_0 *le vecteur $\lim_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ et on le note $f'(t_0)$.*
- *L'application f est dite dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I et on appelle* dérivée de f *l'application $f' : t \mapsto f'(t)$.*

De manière équivalente, f dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si $\lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ existe. En d'autres termes,

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0) \cdot f'(t_0) + o(t - t_0) \quad \textit{i.e.} \quad f(t_0 + h) = f(t_0) + h \cdot f'(t_0) + o(h).$$

La dérivabilité de f se traduit également par la dérivabilité des fonctions composantes.

Proposition II.2. *Si E est muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $f = f_1 e_1 + \cdots + f_p e_p$, alors f est dérivable si et seulement si les fonctions f_i le sont. Dans ce cas, $f' = f_1' e_1 + \cdots + f_p' e_p$.*

Exemple II.3. *L'application* $R : t \mapsto \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, de dérivée* $t \mapsto R'(t) = R(t + \pi/2)$.

Proposition II.4. *Toute application dérivable est continue.*

Éléments de preuve. Si f est dérivable en t_0, $f(t_0+h) = f(t_0)+h\cdot f'(t_0)+o(h)$ donc $f(t_0+h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(t_0)$. □

II.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition II.5 (Premières opérations). *Soient* $f, g : I \to E$ *deux fonctions dérivables sur* I.

(i) Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ *est dérivable sur* I *et* $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$;

(ii) Si $\lambda : I \to \mathbb{R}$ *est dérivable sur* I, $\lambda \cdot f$ *l'est également et* $(\lambda \cdot f)' = \lambda' \cdot f + \lambda \cdot f'$;

(iii) Si $\lambda : \mathbb{R} \to I$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, $f \circ \lambda$ *l'est également et* $(f \circ \lambda)' = \lambda' \cdot (f' \circ \lambda)$.

Attention, le produit $f \times g$ *a rarement un sens lorsque* $p \neq 1$.

Exercice II.6. *Soit* $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *une application dérivable.*

(i) Établir la dérivabilité de $t \mapsto A(t)^n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$ *et exprimer la dérivée.*

(ii) Supposons que $A(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$. *Même question avec* $t \mapsto A^{-1}(t)$.

Proposition II.7 (Dérivabilité et application linéaire). *Soient* $f : I \to E$ *une fonction dérivable sur* I *et* $u \in \mathcal{L}(E, F)$. *Alors* $u \circ f$ *est dérivable et* $(u \circ f)' = u \circ f'$.

Éléments de preuve. Tout repose sur la linéarité (et donc la continuité de u en dimension finie). En effet,

$$\frac{u(f(t_0 + h)) - u(f(t_0))}{h} = u\left(\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} u(f'(t_0)).$$

On peut aussi écrire $u(f(t_0 + h)) = u(f(t_0)) + hu(f'(t_0)) + o(h)$ par continuité de u. □

Exemple II.8. *Si* $f : I \to \mathbb{C}$ *est dérivable sur* I, $\mathrm{Re}(f)$ *également. Si* $g : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est dérivable sur* I, $\mathrm{Tr}(g)$ *également.*

Proposition II.9 (Dérivabilité et application bilinéaire). *Soient* $f : I \to F$ *et* $g : I \to G$ *deux fonctions dérivables sur* I *et* $B : F \times G \to E$ *bilinéaire. Alors,* $B(f, g)$ *est dérivable sur* I *et* $B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$.

Éléments de preuve. Travailons ici avec les développements limités. f et g sont supposées dérivables sur I donc pour tout $t_0 \in I$,

$$f(t_0 + h) \underset{h\to 0}{=} f(t_0) + h \cdot f'(t_0) + o(h) \quad \text{et} \quad g(t_0 + h) \underset{h\to 0}{=} g(t_0) + h \cdot g'(t_0) + o(h).$$

Par bilinéarité de B, $B(f(t_0+h), g(t_0+h)) \underset{h\to 0}{=} B(f(t_0), g(t_0))+h[B(f'(t_0), g(t_0))+B(f(t_0), g'(t_0))]+o(h)$. C'est la continuité de B qui permet, par exemple, d'affirmer que $B(f(t_0), o(h)) = o(h)$. □

Exemple II.10. *Soient* $f, g : I \subset \mathbb{R} \to E$ *deux fonctions dérivables. Si* $E = \mathbb{R}^3$, $f \wedge g$ *est dérivable sur* I *et* $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$. *Si* $\langle \cdot | \cdot \rangle$ *désigne un produit scalaire sur* E, $\langle f | g \rangle$ *est dérivable sur* I *et* $\langle f | g \rangle' = \langle f' | g \rangle + \langle f | g' \rangle$.

Exercice II.11. *Si* E *est un espace euclidien et* f *dérivable,* $\|f\|$ *est constante si et seulement si le vecteur vitesse* f' *est orthogonal à* f *en tout point.*

Exercice II.12. *Calculer* $\Delta_n(x) = \det(A)$ *où* $x \in \mathbb{R}$ *et* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est définie par* $a_{i,j} = \frac{x^{i-j+1}}{(i-j+1)!}$ *si* $i \geq j - 1$, $a_{i,j} = 0$ *sinon.*

II.3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Définition II.13. *Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application f est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si elle est dérivable k fois sur I et si sa dérivée k-ième, notée $f^{(k)}$, est continue sur I.*

Exercice II.14. *Soit $f : \mathbb{R} \to E$ de classe $\mathscr{C}^2$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'application g définie par $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ si $x \neq 0$, $g(0) = f'(0)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*

Proposition II.15 (Formule de Leibniz)**.** *Si $f : I \to \mathbb{R}^p$ et $\lambda : I \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors*

$$(\lambda \cdot f)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{(k)} f^{(n-k)}.$$

III. Intégration d'une fonction vectorielle sur un segment

III.1 Définition et premières propriétés

Pour définir l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans un e.v.n. de dimension p, il suffit d'intégrer les fonctions composantes (ce sont des fonctions numériques) dans une base prédéfinie :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{p} f_i(t)e_i\right) dt = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b f_i(t)\,dt\right) e_i.$$

À condition bien entendu que le résultat ne dépende pas de la base choisie, ce que l'on admet !

Théorème III.1 (Intégrale d'une fonction vectorielle continue)**.** *Soit $f : [a, b] \to E$ continue sur $[a, b]$, où E est un e.v.n. de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$. Le vecteur $\sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b f_i(t)\,dt\right) e_i$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$, on l'appelle* intégrale de f sur $[a, b]$ *et on note :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b f_i(t)\,dt\right) e_i.$$

Théorème III.2 (Propriétés de l'intégrale)**.** *Soient $f, g : [a, b] \to E$ deux fonctions continues où $(E, \|\cdot\|)$ est un e.v.n. de dimension finie, avec $a < b$.*

(i) Linéarité de l'intégrale *: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,*

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt.$$

(ii) Relation de Chasles *: $\forall c \in [a, b]$,*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

(iii) Convergence des sommes de Riemann *:*

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt.$$

(iv) Inégalité triangulaire *:*

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt.$$

III.2 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Théorème III.3 (Théorème fondamental du calcul intégral). *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors, pour tout $a \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $F' = f$.*

Théorème III.4. *Pour toute fonction $f : I \to E$ de classe $\mathscr{C}^1$, $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$.*

Corollaire III.5 (Inégalité des accroissements finis). *Soit $f : I \to E$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. S'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $t \in I$, $\|f'(t)\| \leq M$, alors :*

$$\forall a, b \in I, \quad \|f(b) - f(a)\| \leq M \cdot |b - a|.$$

III.3 Formules de Taylor

Théorème III.6 (Formules de Taylor). *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Soient $a, x \in I$.*

(i) Formule de Taylor avec reste intégral *:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

(ii) Inégalité de Taylor-Lagrange *:*

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{avec } M = \sup_{t \in [a,b]} \|f^{(n+1)}(t)\|.$$

(iii) Formule de Taylor-Young *:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n).$$

IV. Suites et séries de fonctions vectorielles

Par la suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignera une suite de fonctions $f_n : I \to E$ où I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé supposé de dimension finie.

Définition IV.1 (Convergences simple et uniforme (suite de fonctions)).

- *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge* simplement *vers la fonction f sur I si :*

$$\forall x \in I, \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in I, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

- *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge* uniformément *vers la fonction f sur I si $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang sur I et :*

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \textit{c'est-à-dire} \quad \sup_{x\in I} \|f_n(x) - f(x)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in I, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

Théorème IV.2 (Continuité de la limite uniforme)**.** *La limite uniforme d'une suite convergente de fonctions continues sur I est continue sur I.*

On considère désormais la série de fonctions $\sum f_n$ où les fonctions f_n sont définies sur I et à valeurs dans E.

Définition IV.3 (Convergences simple, uniforme et normale)**.**

- *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge* simplement *sur I si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I. En cas de convergence, on appelle* fonction somme *de la série la fonction S définie par :*

$$\forall x \in I, \quad S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

- *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge* uniformément *sur I si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I.*
- *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge* normalement *sur I si les fonctions f_n sont bornées sur I (à partir d'un certain rang) et si la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty,I}$ converge.*

Bien entendu, si la série de fonctions converge normalement sur I alors elle converge uniformément sur I.

Théorème IV.4. *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans E convergeant uniformément vers f sur I et soit $a \in I$. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a.*

Théorème IV.5 (Théorème de la double limite)**.** *Soient $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans E et a un point adhérent à I (ou $a = \pm\infty$). On suppose que :*

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en a.

(ii) La série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite en a et

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Théorème IV.6 (Dérivation terme à terme)**.** *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans E. On suppose que :*

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

(ii) $\sum f_n$ converge simplement sur I.

(iii) $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur tout segment de I, est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Théorème IV.7 (Intégration terme à terme sur un segment)**.** *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur un segment $[a,b]$ et à valeurs dans E, convergeant uniformément sur le segment $[a,b]$. Alors $\sum \int_a^b f_n(x)dx$ converge et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x)dx\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx.$$

Exercice IV.8. *(i) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|M\| < 1$ pour une certaine norme sous-multiplicative, $\sum M^k$ converge et préciser sa somme.*

(ii) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $n \geq 1$, et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $R \geq 0$ tel que :

$$\forall r \geq R, \quad A^k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^{k+1} \left(re^{i\theta} I_n - A\right)^{-1} d\theta.$$

(iii) Retrouver le théorème de Cayley-Hamilton.

V. Théorèmes d'intégration sur un intervalle quelconque pour les fonctions vectorielles (HP)

Le théorème de convergence dominée s'étend sans difficulté aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions qui converge simplement sur I vers la fonction f. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée sur I si, et seulement si, pour tout $1 \leq k \leq d$, la suite $(f_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ des composantes est dominée sur I.

Théorème de convergence dominée
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions continues par morceaux de I dans un espace vectoriel de dimension finie E.
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux f et s'il existe une fonction g intégrable sur I telle que

$$\forall t \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n(t)\|_E \leq g(t),$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I \|f(t) - f_n(t)\|_E \, dt = 0$$

et en particulier

$$\int_I f_n(t)\, dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\, dt.$$

On peut en déduire une condition suffisante pour qu'une intégrale varie continûment en fonction d'un paramètre.

Théorème de continuité
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et I, un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une fonction f définie pour $(x,t) \in \Omega \times I$ et on suppose que :

- **Hypothèse de régularité**
  Pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est continue sur Ω;
- **Hypothèse d'intégrabilité**
  Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I;
- **Hypothèse de domination**
  Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}_\Omega(x_0)$ et une fonction g intégrable sur I telle que
  $$\forall t \in I, \quad \forall x \in V, \quad \|f(x,t)\|_E \leq g(t).$$

Alors la fonction F définie par

$$F(x) = \int_I f(x,t)\, dt$$

est continue sur Ω.

Lorsque Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dispose d'une condition suffisante pour que cette intégrale soit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Théorème de dérivation sous l'intégrale
Soient Ω et I, deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f, une fonction définie pour tout $(x,t) \in \Omega \times I$. On suppose que :

- **Hypothèse de régularité**
  Pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω;
- **Hypothèse d'intégrabilité**
  Pour tout $x \in \Omega$, les fonctions
  $$[t \mapsto f(x,t)] \quad \text{et} \quad \left[t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right]$$
  sont intégrables sur I;
- **Hypothèse de domination**
  Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}_\Omega(x_0)$ et une fonction g intégrable sur I tels que
  $$\forall x \in V, \quad \forall t \in I, \quad \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right\|_E \leq g(t).$$

Alors la fonction F définie sur Ω par

$$F(x) = \int_I f(x,t)\,dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et

$$\forall x \in V, \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Bien entendu, ce résultat se généralise aux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout entier $n \geq 2$ et donc aux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Intégration terme à terme
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions d'un intervalle I dans un espace vectoriel de dimension finie E qui converge simplement sur I. On suppose que :

- **Hypothèse d'intégrabilité**
  Les fonctions f_n sont intégrables sur I;
- **Hypothèse de régularité**
  La somme S de la série $\sum f_n$ est continue par morceaux sur I;
- **Hypothèse de domination**
  La série de terme général positif
  $$\sum \int_I \|f_n(t)\|_E\,dt$$
  est convergente.

Alors la somme $S : I \to E$ est intégrable sur I, la série $\sum \int_I f_n(t)\,dt$ est convergente et

$$\int_I S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,dt.$$

VI. Exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice

Rappelons la définition de l'exponentielle d'un endomorphisme $a \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, ainsi que la définition de l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\exp(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \quad \text{et} \quad \exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

L'équivalence des normes en dimension finie nous assure, grâce à une norme bien choisie, la convergence absolue des séries sous-jacentes, donc l'existence de l'exponentielle. Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a)$, alors $\exp(A) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\exp(a))$. C'est peut-être une évidence, mais faisons observer que l'application $\exp(a)$ est bien linéaire.

Théorème VI.1 (Dérivation de $\exp(tA)$)**.** *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la fonction vectorielle $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto A \times \exp(tA)$.*

Lemme VI.2. *Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AB = BA$, alors A et $\exp(B)$ commutent.*

Proposition VI.3. *Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AB = BA$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$.*

Proposition VI.4. *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Alors, $\exp(A)$ est diagonalisable et :*

$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1} = P\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})P^{-1}.$$

Plus généralement, en trigonalisant, $\mathrm{Sp}(\exp(A)) = \{e^{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$ et on remarque que A et $\exp(A)$ partagent les mêmes vecteurs propres : si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ,

$$AX = \lambda X \quad \textit{et} \quad \exp(A)X = e^{\lambda}X.$$

Exercice VI.5. *Calculer l'exponentielle des trois matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{bmatrix} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

Exercice VI.6. *Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\exp(A) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.*

Exercice VI.7. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Construire $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\exp(A) = P(A)$.*