Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique • Mathématiques

Intégrales à paramètres

Mouad El Assadi

Professeur agrégé de mathématiques

Ingénieur d'État en génie civil — École Hassania des Travaux Publics (EHTP)

elassadimouad1@gmail.com

Table des matières

I Suites et séries d'intégrales **2**
I.1 Interversion limite/intégrale 2
I.2 Intégration terme à terme 4

II Limite et continuité d'intégrales à paramètre dans un e.v.n. **6**

III Dérivation d'intégrales à paramètre réel **8**

IV La fonction Γ (HP mais classique) **9**

Le but de ce chapitre est d'étudier le comportement d'intégrales à paramètres. Il s'agit donc d'étudier une famille de fonctions $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ intégrables sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Leurs intégrales définissent une famille $\left(\int_I f_\lambda(t)dt\right)_{\lambda\in\Lambda}$, donc on cherche à étudier le comportement par rapport au paramètre λ.
Le contexte initial (qui est à la source des autres études) concerne un paramètre entier (i.e. $\Lambda = \mathbb{N}$). On dispose donc d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ intégrables sur I, et on s'intéresse à la limite de la suite $\left(\int_I f_n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Nous nous intéresserons ensuite au cas où le paramètre λ est pris dans une partie Λ d'un e.v.n. de dimension finie. Nous adopterons dans ce contexte plutôt une représentation fonctionnelle de la famille, qui peut alors être décrite par une application :

$$f : \Lambda \times I \to \mathbb{K}, \quad (x,t) \mapsto f(x,t).$$

Leurs intégrales définissent donc une application de Λ dans $\mathbb{K}$

$$g : \Lambda \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \int_I f(x,t)dt.$$

On s'intéressera dans ce contexte aux propriétés relatives aux limites et à la continuité. Enfin, dans un contexte un peu plus restreint où Λ est un intervalle de $\mathbb{R}$, on s'intéressera aux problèmes de dérivabilité de g.

I. Suites et séries d'intégrales

Dans toute cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, E désigne un e.v.n. de dimension finie, et (f_n) désigne une suite d'applications de I dans E. Les premiers résultats ont déjà été vus dans des contextes divers, et le but est ici de les regrouper afin d'avoir une meilleure vue d'ensemble sur les différents outils à disposition pour l'étude des intégrales de suites ou séries de fonctions.

I.1 Interversion limite/intégrale

Lorsque I est un segment, on dispose d'un outil particulier, déjà vu dans un chapitre antérieur, lié à la convergence uniforme.

Théorème I.1 (Interversion lim/intégrale en cas de CVU)**.** *On suppose que :*

(i) I *est un segment ;*

(ii) *les applications* (f_n) *sont continues ;*

(iii) *la suite* (f_n) *converge uniformément vers* f *sur* I*.*

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,dt = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt.$$

Nous avions montré un résultat plus général, concernant la convergence uniforme d'une suite de primitives.

Proposition I.2 (Extension du théorème d'interversion limite/intégrale)**.** *Le théorème d'interversion limite/intégrale par CVU reste vrai sous les hypothèses suivantes :*

(i) I *est un segment ;*

(ii) *les* (f_n) *sont c.p.m. (ou plus généralement Riemann-intégrable) ;*

(iii) (f_n) *converge uniformément vers une fonction* f *;*

(iv) la fonction f est c.p.m. (ou plus généralement Riemann-intégrable).

La quatrième hypothèse remplace les hypothèses plus fortes de l'énoncé principal, qui assuraient la continuité de f.
Cela permet d'englober le cas des fonctions en escaliers.

Méthode I.3. *Si certains points empêchent la CVU, ou si l'intégrale n'est pas définie sur tout le segment on peut soit se rabattre sur le théorème de convergence dominé, soit, si ce n'est pas possible, couper autour de la borne.*

Exemple I.4. *Calculer* $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)^n \, dx$.

L'outil le plus efficace, et plus général que le précédent (puisque valide sur des intervalles quelconques) reste le suivant, qu'on a déjà donné, sans le démontrer.

Théorème I.5 (Théorème de convergence dominée, TCD)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que :*

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est c.p.m. ;

(ii) (f_n) converge simplement vers une fonction f ;

(iii) (hyp. de domination) il existe $\varphi : I \to \mathbb{K}$ intégrable telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq \varphi(x)$.

Alors les (f_n) et f sont intégrables sur I et $\int_I f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f$.

Exemple I.6.
1. *Reprendre les exemples précédents, y compris celui où on n'avait pas CVU sur tout l'intervalle.*
2. *Déterminer* $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$.
3. *Déterminer* $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (x+n)e^{-\sqrt{n}x} dx$.

Remarque I.7.
1. *Lorsque la suite f_n est décroissante (ce qui est le cas des premiers exemples), alors on pourra toujours dominer la suite par f_0, à condition qu'elle soit intégrable.*
2. *Lorsque la suite est croissante, et que la limite f est intégrable, alors on pourra dominer (f_n) par f. C'est le cas du deuxième exemple.*
3. *Le dernier exemple montre un cas où (f_n) n'est ni croissante ni décroissante.*

I.2 Intégration terme à terme

Nous avons vu que le théorème d'interversion limite/intégrale dans le cas CVU s'adapte bien au cas des séries :

Théorème I.8 (Interversion $\sum / \int$ par CVU sur un segment)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions d'un intervalle I à valeurs dans un e.v.n. F de dimension finie, et soit $a \in I$.*

1. *Si $\sum f_n$ est uniformément convergente sur I, alors*

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt$$

converge uniformément sur I vers $x \mapsto \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

2. *En particulier, si $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $[a,b]$,*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

L'intégrabilité sur un segment quelconque I n'ayant été définie que pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, les autres énoncés se placent dans ce contexte ; ils peuvent s'adapter sans réelle difficulté au cadre d'e.v.n. de dimension finie, en regardant coordonnée par coordonnée dans une base.

Théorème I.9 (Intégration terme à terme, cas positif)**.** *Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$. On suppose que :*

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq 0$;

(ii) $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement vers une fonction S ;

(iii) S est continue par morceaux sur I.

Alors, l'égalité suivante est toujours vérifiée dans $\mathbb{R}_+$:

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,dt.$$

Éléments de preuve. Démonstration hors programme. Elle reste abordable avec le TCD.
1. Si $\sum f_n$ est intégrable, dominer la somme partielle par la somme totale et utiliser le TCD.
2. Sinon, on a divergence sur une des deux bornes de I, disons la borne supérieure. Soit $a \in I$. Justifier qu'il existe x_0 tel que pour tout $x \geq x_0$,

$$\int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx \geq A,$$

A étant posé arbitrairement. Utiliser encore le TCD sur $[a,x]$, pour montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$ est minoré par tout A réel. □

Remarque I.10. *En particulier, si les f_n sont positifs, on peut justifier l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ en majorant $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,dt$.*

Exemple I.11. *1. Intégrabilité de $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{x^3+n^3}$ sur $[0,+\infty[$.*

2. *Intégrabilité de* $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2t^2}$ *sur* $[0, +\infty[$.

3. *Calculer* $\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n^4}]}$.

4. *Calculer* $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt$, *en fonction de* $\zeta(2)$.

Remarque I.12. 1. *Le TITT positif peut s'utiliser dans des cas où on n'a pas convergence uniforme, et permet donc de gérer des cas plus variés que le théorème d'interversion* $\sum / \int$ *par CVU. C'est par exemple le cas du troisième exemple.*

2. *Le dernier exemple montre une situation typique dans laquelle on combine un développement en série et une intégration terme à terme pour calculer une intégrale. Les exemples de ce type sont nombreux, pensez-y !*

3. *Le point le plus délicat à justifier dans le cas positif est souvent la c.p.m. de la somme. Le programme stipule explicitement de ne pas trop s'attarder sur ces justifications.*

Théorème I.13 (Intégration terme à terme, cas général)**.** *Soit, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \to \mathbb{K}$. *On suppose que :*

(i) *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *est intégrable ;*

(ii) $\sum_{n>0} f_n$ *converge simplement vers une fonction* S *;*

(iii) S *est c.p.m. sur* I *;*

(iv) $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)|\, dt < +\infty$.

Alors S *est intégrable sur* I, *et*

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\, dt.$$

Éléments de preuve. Démonstration hors-programme. On peut le démontrer un peu plus facilement sous une hypothèse supplémentaire, en supposant de plus $\sum |f_n|$ c.p.m.. □

Exemple I.14. *Calculer* $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt$ *sous forme d'une somme de Riemann alternée.*

Remarque I.15. *Remarquez la similitude entre ces résultats d'intégration terme à terme, et les théorèmes de Fubini pour les familles sommables (version positive dans* $\mathbb{R}$, *et version générale). D'ailleurs, les théorèmes de Fubini peuvent se retrouver à partir des théorèmes d'ITT, en considérant des fonctions en escalier* f_n *prenant la valeur* $a_{n,p}$ *sur l'intervalle* $[p, p+1]$. *Ces théorèmes peuvent être vus comme une version continue/discrete des théorèmes de Fubini discret/discret. Il en existe aussi une version pour les intégrales doubles (version continue/continue), mais celle-ci n'est pas au programme.*

Méthode I.16 (Si $\sum \int_I |f_n| = +\infty$)**.** *Dans le cas où les conditions du TITT ne sont pas vérifiées, on peut parfois utiliser le TCD sur la somme partielle* (S_n). *C'est notamment assez fréquent avec des séries alternées, puisqu'on parvient dans ce cas à encadrer la somme* S *entre* S_0 *et* S_1. *L'hypothèse de domination est donc assez facile à obtenir.*

Exemple I.17. *Justifier l'intégrabilité, et exprimer sous forme d'une somme la valeur de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-\sqrt{n}t}\, dt$.

Remarque I.18. *Le caractère alterné permet aussi l'étude facile de la CVU, donc de la continuité sur les compacts, ce qui nous assure la continuité par morceaux (au moins sur l'intervalle $\hat{I}$, ce qui est suffisant).*

Méthode I.19 (Récupérer les bornes par CVU)**.** *Si on ne peut faire qu'une interversion partielle (par CVU ou par TITT), on peut faire tendre une borne vers la borne voulue en étudiant la convergence uniforme de $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)\, dt$, pour pouvoir utiliser le théorème de la double limite.*

Exemple I.20. *En considérant* $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$, *montrer que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$.

II. Limite et continuité d'intégrales à paramètre dans un e.v.n.

Le point de départ de l'étude des intégrales à paramètres est la version continue du TCD. Elle est donnée dans le programme sous la forme suivante.

Théorème II.1 (Théorème de convergence dominée, version continue réelle)**.** *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ une famille de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathbb{K}^I$ et $a \in \overline{J}$. On suppose que :*

(i) pour tout $\lambda \in J$, f_λ est c.p.m. ;

(ii) pour tout $t \in I$, $f_\lambda(t) \underset{\lambda\to a}{\longrightarrow} f(t)$, et f est c.p.m. ;

(iii) il existe φ telle que pour tout $\lambda \in J$, $|f_\lambda| \leq \varphi$, et φ est intégrable.

Alors

$$\lim_{\lambda\to a} \int_I f_\lambda(t)\, dt = \int_I f(t)\, dt = \int_I \lim_{\lambda\to a} f_\lambda(t)\, dt.$$

Éléments de preuve. On montre directement la version plus générale ci-dessous. □

Une version un peu plus générale, pas explicitement au programme (mais pouvant se déduire du théorème de continuité qui suit, après prolongement de chaque $f(x,\cdot)$), et exprimée, comme on le fait souvent, en notation fonctionnelle plutôt que familiale, permet de considérer un paramètre dans un e.v.n..
Dans cet énoncé, f étant une fonction définie sur un produit cartésien $A \times I$, $f(\cdot, t)$ désigne la fonction $x \mapsto f(x,t)$ définie sur A, obtenue en fixant la deuxième variable égale à t. De même $f(x,\cdot)$ désigne la fonction d'une variable obtenue en faisant la première variable égale à x.

Théorème II.2 (Théorème de convergence dominée, version continue vectorielle)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un e.v.n. de dimension finie, et A une partie de E. Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$, $a \in \overline{A}$, et $g : I \to \mathbb{K}$. On suppose que :*

(i) pour tout $x \in A$, $f(x,\cdot)$ est c.p.m. ;

(ii) pour tout $t \in I$, $f(x,t) \underset{x\to a}{\longrightarrow} g(t)$, et g est c.p.m. ;

(iii) (domination) il existe φ telle que pour tout $x \in A$, $|f(x,\cdot)| \leq \varphi$, et φ est intégrable.

Alors

$$\lim_{x\to a} \int_I f(x,t)\, dt = \int_I g(t)\, dt = \int_I \lim_{x\to a} f(x,t)\, dt.$$

Éléments de preuve. Par critère séquentiel, on se ramène au TCD discret. □

Exemple II.3. *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x+\ln(t)}{1+x^2t^{\frac{3}{2}}}\,dt$.

En considérant $a\in I$, on obtient une propriété de continuité.

Théorème II.4 (Continuité ponctuelle d'une intégrale à paramètre dans un e.v.n.)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un e.v.n. de dimension finie, et A une partie de E. Soit $f:A\times I\to\mathbb{K}$ et $a\in A$. On suppose que :*

(i) pour tout $x\in A$, $f(x,\cdot)$ est c.p.m. ;

(ii) pour tout $t\in I$, $f(\cdot,t)$ est continue en a ;

(iii) (domination) il existe φ telle que pour tout $x\in A$, $|f(x,\cdot)|\leq\varphi$, et φ est intégrable.

Alors la fonction

$$F:x\mapsto\int_I f(x,t)\,dt$$

est continue en a.

Éléments de preuve. C'est l'application directe du TCD, dans sa version continue vectorielle, en un point du domaine. □

On en déduit de façon immédiate :

Théorème II.5 (Continuité globale d'une intégrale à paramètre dans un e.v.n.)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un e.v.n. de dimension finie, et A une partie de E. Soit $f:A\times I\to\mathbb{K}$. On suppose que :*

(i) pour tout $x\in A$, $f(x,\cdot)$ est c.p.m. ;

(ii) pour tout $t\in I$, $f(\cdot,t)$ est continue sur A ;

(iii) (domination) il existe φ telle que pour tout $x\in A$, $|f(x,\cdot)|\leq\varphi$, et φ est intégrable.

Alors la fonction

$$F:x\mapsto\int_I f(x,t)\,dt$$

est continue sur A.

Exemple II.6.

1. *Étudier la continuité de $x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(xt)e^{-t^2}\,dt$ et déterminer sa limite en $+\infty$.*
2. *Transformée de Laplace : Soit f une fonction intégrable sur $]0,+\infty[$. Soit $A=\{p\in\mathbb{C}\mid\mathrm{Re}(p)\geq 0\}$.*

   Étudier l'existence et la continuité sur A de la transformée de Laplace $F(p)=\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}\,dt$.

Remarque II.7. *En pratique, il est fréquent de ne pas vérifier l'hypothèse de domination sur A tout entier, mais de le faire sur une famille $(B_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de A tel que tout point de A soit dans l'intérieur d'un des B_i. Par exemple, si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, on peut se contenter de faire la domination sur tous les segments.*

Exemple II.8. *Étudier la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$ de $\Gamma:x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,dt$.*

III. Dérivation d'intégrales à paramètre réel

Dans cette section, afin de pouvoir dériver, on considère le cas où le paramètre est réel, de sorte à obtenir après intégration une application d'une variable réelle.

Théorème III.1 (Dérivation d'une intégrale à paramètre réel)**.** *Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une application telle que :*

(i) pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;

(ii) pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot)$ est intégrable sur I ;

(iii) pour tout $x \in A$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ est c.p.m. sur I ;

(iv) (domination de la dérivée) il existe φ intégrable sur I telle que

$$\forall x \in A, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)\right| \leq \varphi.$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, et :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Éléments de preuve. Former le taux d'accroissement. L'IAF et les hypothèses permettent l'utilisation du TCD continu. □

Exemple III.2. *Soit $F : x \mapsto \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$. Exprimer la dérivée de F sous forme de la dérivée d'une intégrale à paramètres, et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$.*

Par symétrisation par parité, on vient de démontrer le résultat classique suivant :

Proposition III.3 (Intégrale de Gauss, HP classique)**.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

Par récurrence à partir du théorème de dérivation, on obtient :

Théorème III.4 (Classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre réel)**.** *Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une application telle que :*

(i) pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;

(ii) pour tout $x \in A$ et tout $j \in [0, k-1]$, $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \cdot)$ est intégrable sur I ;

(iii) pour tout $x \in A$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \cdot)$ est c.p.m. sur I ;

(iv) (domination de la dérivée k-ième) il existe φ intégrable sur I telle que

$$\forall x \in A, \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \cdot)\right| \leq \varphi.$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A, et

$$\forall j \in [0,k], \forall x \in A, \quad g^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,dt.$$

Exemple III.5. *Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et exprimer sa dérivée sous forme intégrale.*

IV. La fonction Γ (HP mais classique)

Nous faisons dans ce paragraphe un rapide bilan des propriétés importantes de la fonction Γ d'Euler, pour la plupart déjà vues en exemple ou en exercice.

Définition IV.1 (Fonction Γ, Euler). *La fonction Γ est définie, pour tout $z \in \mathbb{C}$ telle que l'intégrale converge, par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

Proposition IV.2 (Domaine de définition). *La fonction Γ est définie sur $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$.*

Proposition IV.3 (Identité remarquable). *Pour tout $z \in P$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.*

Proposition IV.4 (Valeurs remarquables).
1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.*
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Éléments de preuve. Pour le 2, se ramener à l'intégrale de Gauss par changement de variable. □

Proposition IV.5 (Continuité sur P). *La fonction Γ est continue sur P.*

Proposition IV.6 (Régularité sur $\mathbb{R}_+^*$). *La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,*

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^n t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Proposition IV.7 (Convexité et variations). *Γ est convexe. De plus elle décroit puis croit vers plus l'infini.*

Éléments de preuve. Voir l'exemple corrigé dans le dossier intégrale à paramètres dans le drive. □

Proposition IV.8 (Comportement asymptotique).
1. $\lim\limits_{x \to 0} \Gamma(x) = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \Gamma(x) = +\infty$
3. $\Gamma(x) \approx \frac{1}{x}$.

Éléments de preuve. La dernière propriété entraînant la première, on peut la montrer d'abord, avec l'identité remarquable. La deuxième s'obtient par croissance et les valeurs particulières déjà trouvées. □

La fonction Γ possède bien d'autres propriétés, et est d'une grande importance, notamment car elle intervient dans le calcul de nombreuses transformées de Laplace. Nous aurons peut-être l'occasion de prolonger notre étude de Γ en DM.