Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique • Mathématiques

Séries entières

Mouad El Assadi

Professeur agrégé de mathématiques

Ingénieur d'État en génie civil — École Hassania des Travaux Publics (EHTP)

elassadimouad1@gmail.com

Table des matières

I Définitions, convergence **2**
I.1 Définition 2
I.2 Domaine de convergence, rayon de convergence 2
I.3 Opérations sur les séries entières 5

II Régularité de la somme d'une série entière **6**
II.1 Convergence uniforme 6
II.2 Continuité et limite radiale 7
II.3 Dérivabilité et classe $\mathcal{C}^\infty$ 7

III Développements en séries entières **9**
III.1 Généralités sur les fonctions développables en séries entières 9
III.2 DSE de l'exponentielle 10
III.3 DSE usuels 11

On étudie dans ce chapitre un cas particulier important de séries de fonctions : les séries entières, de la forme $\sum a_n x^n$. Ces séries apparaissent notamment de façon naturel comme prolongement à l'infini de développements limités en 0, et on peut donc légitimement se demander si une fonction f de classe C^∞ peut s'écrire, au moins localement, sous forme d'une série entière, qui correspondrait au prolongement infini de ses développements limités (donc de la formule de Taylor-Young), c'est-à-dire à sa série de Taylor. Nous nous intéresserons à cette question en fin de chapitre, après avoir donné les définitions et les propriétés générales liées à la convergence, ainsi qu'à la régularité de la somme.
Dans tout ce chapitre, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Définitions, convergence

I.1 Définition

Définition I.1 (Série entière). *la forme*

- *Une série entière est une suite de fonctions $\sum f_n$ où (f_n) est de*

$$f_n : x \mapsto a_n x^n,$$

avec $(a_n) \in K^N$.

- *On note $\sum a_n z^n$ la série entière associée à la suite (a_n), ou éventuellement $\sum_{n \geq n_0} a_n z^n$ si l'indexation commence au rang n_0.*

Remarque I.2 (Variable réelle ou complexe). *On utilise généralement la notation $\sum a_n z^n$ lorsqu'on considère la série de la variable complexe $z \in C$, et $\sum a_n x^n$ ou $\sum a_n t^n$ lorsqu'on considère la série de la variable réelle x ou t dans $\mathbb{R}$ (y compris si les coefficients a_n sont complexes).*

Remarque I.3 (Avertissement). *Les coefficients a_n doivent être indépendants de la variable z (ou x ou t).*

Exemple I.4. *Les séries de fonctions suivantes sont-elles des séries entières ?*

1. $\sum z^n$
2. $\sum n z^n$
3. $\sum n z^{n-1}$
4. $\sum n z^{n-2}$
5. $\sum \ln(n) z^n$
6. $\sum 2^z z^n$

I.2 Domaine de convergence, rayon de convergence

Nous allons montrer dans ce paragraphe que les séries entières ont un domaine de convergence d'une forme très précise : il s'agit de disques centrés en 0, contenant ou non certains points de leurs bords. Ce disque peut éventuellement être réduit à un point, ou inclure $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tout entier. Le point clé pour obtenir cette description est le lemme d'Abel.
Dans toute cette section, $\sum a_n z^n$ désigne une série entière sur $\mathbb{K}$.

Lemme I.5 (Abel). *Soit $z_0 \in K$. Si $(a_n z_0^n)_{n \in N}$ est bornée, alors pour tout $z \in \hat{B}(0, |z_0|)$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.*

Éléments de preuve. Écrire $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ □

Remarque I.6. *En particulier, si $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument sur $\hat{B}(0, |z_0|)$.*

Le lemme d'Abel motive la définition suivante.

Définition I.7 (Rayon de convergence)**.** *On appelle rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ l'élément suivant, bien défini dans $\mathbb{R}_\pm$:*

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+,\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\}.$$

Exemple I.8. *1. Rayon de convergence de $\sum n^\alpha z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, à partir de la définition.*

2. Rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n!}$

3. Rayon de convergence de $\sum n! z^n$.

Par convention, si $R = +\infty$, $\hat{B}(0, R)$ désigne $\mathbb{K}$ tout entier, et si $R = 0$, $\hat{B}(0, R) = \emptyset$. De la définition-même résulte la propriété suivante.

Proposition I.9 (Rayon de $\sum \lambda a_n z^n$)**.** *Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum \lambda a_n z^n$ ont même rayon de convergence.*

Théorème I.10 (Domaine de convergence d'une série entière)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.*

1. *La série $\sum a_n z^n$ converge absolument sur $\hat{B}(0, R)$ (i.e. si $|z| < R$).*
2. *La série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement si $|z| > R$.*
3. *La convergence pour $|z| = R$ peut varier suivant les séries et suivant la valeur de z. $\hat{B}(0, R)$ est appelé disque ouvert (ou intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$) de convergence de la série entière*

$$\sum a_n z^n,$$

et est parfois aussi noté $D_O(0, R)$.

Éléments de preuve. Pour $z \in B(0, R)$, considérer r tel que $|z| < r < R$, et appliquer le lemme d'Abel. □

Remarque I.11. *Le théorème de convergence des séries entières donne un moyen de déterminer le rayon de convergence, par étude directe du domaine de convergence. Le rayon R délimite alors la zone de convergence et la zone de divergence. Il n'est pas nécessaire d'étudier toutes les propriétés de convergence : par exemple, trouver un z_0 tel que $\sum a_n z_0^n$ converge, mais $\sum a_n z^n$ diverge si $|z| > |z_0|$ permet de déterminer R.*

Exemple I.12. *1. Reprendre les exemples précédents.*

2. Rayon de convergence de $\sum \ln(n) z^{n^2}$

3. Étude sur le cercle des séries suivantes :

(a) $\sum z^n$
(b) $\sum \frac{z^n}{n^2}$
(c) $\sum \frac{z^n}{n}$.

Remarque I.13. *Si $\sum a_n R^n$ converge absolument, alors $\sum a_n z^n$ est convergente (absolument) sur $\overline{B}(0, R)$. Si $\sum a_n R^n$ diverge grossièrement, alors $\sum a_n z^n$ diverge (grossièrement) sur $\mathbb{K}\backslash B(0, R)$.*

Corollaire I.14 (Rayon de convergence associé à une suite de somme convergente)**.** *Soit (a_n) telle que $\sum a_n$ converge. Alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est au moins égal à 1.*

Nous recouterons cette situation en probabilités : si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, cela permet de s'assurer que le rayon de convergence de $\sum P(X=n)t^n$ est au moins égal à 1. Cette série est appelée série génératrice de la variable aléatoire X.
Nous donnons maintenant quelques moyens de calcul du rayon de convergence. Nous ferons un bilan de ces méthodes en fin de paragraphe.

Proposition I.15 (Règle de d'Alembert)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}_+$. Alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\ell} \in \mathbb{R}_+$.*

Remarque I.16. *Ainsi, sous réserve d'existence de cette limite, $R = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. Le programme officiel stipule que « la limite du rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ peut être utilisée directement. »*

Exemple I.17. *Rayon de convergence de $\sum \binom{2n}{n} z^n$.*

Remarque I.18 (Avertissement)**.** *Attention au fait qu'il est important ici que l'indice de a_n corresponde bien à l'exposant en z. Le résultat ne peut pas être mis en oeuvre pour des séries « à trous ».*

Exemple I.19.
1. *Rayon de convergence de $\sum \binom{2n}{n} z^{2n+1}$.*
2. *Rayon de convergence de $\sum e^n z^n$.*

Exercice I.20 (Rayon de convergence d'une série entière)**.** *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, et (b_n) définie par $b_{2n} = a_n$ et $b_{2n+1} = 0$. Quel est le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$?*

Les propriétés suivantes permettent de comparer les rayons de convergence de deux séries entières.

Théorème I.21 (Théorème de comparaison des rayons de convergence)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, de rayons respectifs R_a et R_b, et $n_0 \in \mathbb{N}$.*

1. *Si pour tout $n \geq n_0$, $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$.*
2. *Si $a_n = O(b_n)$ (a fortiori si $a_n = o(b_n)$), alors $R_a \geq R_b$.*
3. *Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.*

Éléments de preuve. Pour 1, on peut revenir à la définition. Pour 2, on se ramène à 1, en utilisant la comparaison des rayons de $\sum b_n z^n$ et de $\sum M b_n z^n$. Le 3 résulte directement de 2. □

Corollaire I.22. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors $\sum_{n\geq n_0} n a_n z^n$ est de rayon de convergence R.*

Éléments de preuve. Une inégalité provient de la comparaison $a_n = O(na_n)$. La deuxième s'obtient par comparaison de $na_n z^n$ à $a_n r^n$, pour $|z| < r < R$. □

Exemple I.23.
1. *$\sum a_n z^n$, $\sum n a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.*
2. *$\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{a_n}{n} z^n$ ont même rayon de convergence.*
3. *Pour toute fraction rationnelle F non nulle, et n_0 assez grand, $\sum_{n\geq n_0} F(n) a_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$.*

Méthode I.24 (Déterminer un rayon de convergence)**.**
- *On pourra toujours commencer par simplifier l'expression en remplaçant a_n par un équivalent (sans condition de signe).*
- *Dans les situations concrètes, si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ admet une limite dans $\mathbb{R}_+$, utiliser la règle de d'Alembert. Veillez à ce que la série soit bien de la forme $\sum a_n z^n$.*

- *Pour des séries à trous $\sum a_n z^{e(n)}$, on peut aussi essayer d'utiliser la règle de d'Alembert, directement sous cette forme (en considérant $\lim \left|\frac{a_{n+1}z^{e(n+1)}}{a_n z^{e(n)}}\right|$).*
- *De façon plus générale, étudier le domaine de concurrence par toute autre technique disponible, pour trouver le rayon qui sépare zone de concurrence et zone de divergence.*
- *On peut parfois s'en sortir avec juste quelques valeurs. Si on trouve par exemple z_1 et z_2 tels que $|z_1| = |z_2|$, et tels que $\sum a_n z_1^n$ converge, alors que $\sum a_n z_2^n$ diverge, alors $R = |z_1| = |z_2|$.*
- *Parfois une unique valeur peut suffire : la divergence non grossière de $\sum a_n z^n$ ou la semi-convergence de $\sum a_n z^n$ suffisent à savoir que z est sur le cercle limite. Ainsi, la divergence non grossière de $\sum \frac{1}{n}$ suffit à conclure que $\sum \frac{z^n}{n}$ est de rayon de convergence 1.*
- *On peut aussi revenir à la définition et étudier le caractère borné de $(a_n z^n)$, notamment à l'aide des croissances comparées.*
- *Enfin, dans des situations un peu plus abstraites on pourra procéder par comparaisons.*

Exercice I.25 (Rayons de convergence)**.** *Déterminer le rayon de convergence R des séries entières $\sum a_n z^n$ et étude de la convergence en R et $-R$, où a_n est donné par :*

1. $a_n = \frac{\mathrm{ch}\, n}{n}$
2. $a_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$
3. $a_n = [e^n]$
4. $a_n = n$*-ième décimale de* π
5. $a_n = \sin n$
6. $a_n = \frac{\cos^2 n}{n}$
7. $a_n =$ *nombre de diviseurs* ≥ 1 *de* n
8. $a_n = \left(\cos \frac{1}{n}\right)^n$, $a \in \mathbb{R}$
9. $a_{2n} = 0$; $a_{2n+1} = 5^n$
10. $a_n^2 = n!$; $a_n = 0$ *dans les autres cas.*

I.3 Opérations sur les séries entières

Proposition I.26 (Somme de deux séries entières)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons R_a et R_b.*

1. *Le rayon de convergence R de $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$.*
2. *Si $R_a \neq R_b$, le rayon de convergence R de $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie l'égalité $R = \min(R_a, R_b)$.*
3. *Si $R_a = R_b$, l'inégalité peut être stricte.*

Évidemment, on a alors, pour tout $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum a_n z^n + \sum b_n z^n.$$

Proposition I.27 (Produit de Cauchy de deux séries entières). *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons R_a et R_b. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Alors le rayon de convergence R_c de $\sum c_n z^n$ vérifie $R_c \geq \min(R_a, R_b)$, et pour tout z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Éléments de preuve. Les séries étant absolument convergentes, on peut faire le produit de Cauchy de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ lorsque $|z| < \min(R_a, R_b)$. □

Remarque I.28 (Avertissement). *L'inégalité peut être stricte.*

Exemple I.29. *1. Rayon de convergence du produit de Cauchy de $\sum (-1)^n x^n$ et de $\sum \frac{1}{4^{\lfloor n/2 \rfloor}} x^n$*

2. Rayon de convergence du produit de Cauchy de $\sum (\delta_{n,0} + 2^n) z^n$ et $\sum (-1)^{\delta_{n,0}} z^n$.
Ce dernier exemple montre que le rayon de convergence du produit de Cauchy peut même être strictement plus grand que le plus grand des deux rayons

Remarque I.30. *On peut montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$, alors $R_c = \min(R_a, R_b)$.*

Exercice I.31 (Produit de Cauchy avec hypothèses étendues). *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries convergentes. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. On suppose que $\sum c_k$ est également convergente. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$.*

II. Régularité de la somme d'une série entière

II.1 Convergence uniforme

Théorème II.1 (Convergence uniforme locale sur le disque ouvert de convergence). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors $\sum a_n z^n$ est normalement, donc aussi uniformément convergence sur tout disque $\hat{B}(0, r)$, avec $r < R$.*

Éléments de preuve. Comparer à $\sum |a_n| r^n$ qui converge puisque $\sum a_n z^n$ est absolument convergente dans $\hat{B}(0, R)$. □

Remarque II.2. *Si $\sum a_n R^n$ converge absolument, la preuve s'adapte facilement pour montrer que $\sum a_n z^n$ est uniformément convergente sur le disque fermé $\overline{B}(0, R)$.*
Le cas où on a un point du disque en lequel on a une semi-convergence est plus délicat, mais on peut quand même en dire quelque chose. Quitte à faire une rotation (consistant à remplacer a_n par $a_n e^{in\theta}$), on peut supposer qu'on a convergence au point R.

Théorème II.3 (Convergence uniforme sur un rayon en un point de convergence, HP). *Soit $\sum a_n z^n$ une série de rayon de convergence $R < +\infty$. On suppose que $\sum a_n R^n$ converge. Alors $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur le rayon $[0, R]$.*

Éléments de preuve. Montrer que le reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^k$ converge uniformément vers 0, en faisant une transformation d'Abel, en écrivant $a_k R^k = R_k - R_{k+1}$, où

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k R^k.$$

□

Remarque II.4. *1. Comme dit plus haut, ce résultat n'a d'intérêt que si la convergence n'est pas absolue. Dans le cas d'une CVA, le résultat obtenu est plus fort.*

2. Attention à ne pas en conclure que $\sum a_n R^n$ converge uniformément au voisinage de R. Ceci est faux en général, et nécessiterait de maîtriser l'approche de R dans toutes les directions (en restant dans le disque de convergence). Ici, on ne s'approche de R qu'en suivant un rayon.

II.2 Continuité et limite radiale

Les études de convergence uniforme ci-dessus amènent directement les propriétés de continuité des séries entières.

Théorème II.5 (Continuité d'une série entière). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, et de somme $A(z)$, pour $z \in \hat{B}(0,R)$. Alors la fonction A est continue sur $\hat{B}(0,R)$.*

Remarque II.6. *Si $\sum a_n R^n$ est absolument convergente, on a même la continuité de A sur $\overline{B}(0,R)$.*

Théorème II.7 (Théorème radial d'Abel). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, et de somme $A(z)$, pour $z \in \hat{B}(0,R)$. Si $\sum a_n R^n$ converge, alors*

$$\lim_{x \to R} \sum a_n x^n = \sum a_n R^n.$$

Éléments de preuve. La démonstration est HP, pour éviter le théorème de CVU sur un rayon, dont le théorème d'Abel radial est une conséquence immédiate par théorème de la double-limite.
Remarque : même si le théorème de CVU sur un rayon est HP, le théorème d'Abel radial est, lui, bien au programme. □

Autrement dit, en combinant les deux résultats précédents, si $\sum a_n z^n$ est de rayon R et $\sum a_n R^n$ converge, la fonction de la variable réelle $x \mapsto \sum a_n x^n$ est continue sur $[0,R]$.

Exemple II.8. *On retrouve $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, connaissant le développement du logarithme sur $]-1,1[$.*
Remarquez que la preuve qu'on en avait donnée reposait sur une transformation d'Abel. Il s'agissait donc en fait de la preuve du théorème d'Abel radial, exprimée dans cette situation particulière.

Remarque II.9. *Le programme ne donne pas de résultat de primitivation spécifique aux séries entières, mais la convergence uniforme sur les $\overline{B}(0,r)$, $r < R$, permet d'utiliser le théorème de primitivation (et d'intégration) des suites de fonctions sur tout intervalle $[a,b] \subset [-R,R[$.*

II.3 Dérivabilité et classe $\mathcal{C}^\infty$

On rappelle que $\sum a_n z^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.

Proposition II.10 (Rayon de convergence des séries dérivées). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n=p} n(n-1)\dots(n-p+1)z^{n-p} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\dots(n+p)z^n$ est de rayon de convergence R.*

Pour étudier les propriétés de dérivabilité, on se limite à la variable réelle. On pourrait obtenir des propriétés de dérivabilité en la variable complexe aussi (la dérivée étant aussi définie par limite du taux d'accroissement), mais cela débouche sur la théorie des fonctions holomorphes, et dépasse largement le cadre du programme.

Théorème II.11 (Régularité de la somme d'une série entière). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$, et de somme égale à $A(x)$, pour $x \in]-R, R[$. Alors A est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, et tout $x \in]-R, R[$,*

$$A^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\dots(n+p)x^n.$$

Exemple II.12. *On retrouve la formule du binôme négatif, en dérivant p fois la relation*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

sur $[-1, 1[$, cette série entière étant de rayon 1.

Corollaire II.13 (Expression des coefficients d'une série entière). *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$, et de somme égale à $A(x)$, pour $x \in]-R, R[$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$a_n = \frac{A^{(n)}(0)}{n!}.$$

Corollaire II.14 (Unicité du développement en série entière).

1. *Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ de sommes A et B, définies sur un intervalle $[0, \alpha]$ ($\alpha > 0$), et telles que $A = B$ sur $[0, \alpha]$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.*

2. *En particulier, soit f une fonction de la variable réelle, à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie au moins sur un intervalle $[0, a]$, $a > 0$. S'il existe une suite (a_n) telle que*

$$\forall x \in [0, a], f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n,$$

alors cette suite est unique.

On termine par une étude de dérivabilité au bord, qui sera bien utile en probabilités, pour l'étude des séries génératrices de variables aléatoires, et le rapport avec les calculs d'espérance et de variance.

Proposition II.15 (Dérivabilité au bord, HP ?). *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon R, et de somme $A(x)$, pour $x \in]-R, R[$.*

1. *Si $\sum a_n R^n$ et $\sum n a_n R^n$ convergent, alors A se prolonge par continuité en R en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R]$, et*

$$A'(R) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n R^{n-1}.$$

2. *Réciproquement, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$, que $\sum a_n R^n$ converge, ce qui permet de définir A sur $]-R, R]$. On suppose de plus que A est dérivable à gauche en R. Alors $\sum_{n \geq 1} n a_n R^{n-1}$ converge, et*

$$A'(R) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n R^{n-1}.$$

Éléments de preuve. 1. Dans le sens direct, c'est le théorème radial d'Abel et le théorème de la classe $\mathcal{C}^1$ par prolongement (corollaire du théorème de la limite de la dérivée).
2. La démonstration du sens réciproque n'est pas exigible. Les hypothèses de positivité permettent d'obtenir la convexité sur $[0, R[$, donc aussi sur $[0, R[$. Majorer alors $\sum_{k=1}^{n} ka_k x^k$ par $A'(R)$, puis passer à la limite quand $x \to R^-$, puis quand $n \to +\infty$. □

Remarque II.16. *Ce théorème n'est explicitement au programme que dans un contexte de probabilités, avec un rayon $R = 1$, et des coefficients tous positifs. Il doit donc être en théorie redémontré dans toute autre circonstance, notamment le sens direct, lorsqu'on n'a pas l'hypothèse de positivité.*

Exercice II.17 (Principe du zéro isolé). *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$, et S sa somme. On suppose $S \neq 0$ et $S(0) = 0$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que S ne s'annule qu'en 0 sur l'intervalle $]-r, r[$ (on dit que 0 est un zéro isolé de S).*

Exercice II.18 (Équivalent en $+\infty$ de la somme d'une série entière). 1. *Déterminer le rayon de convergence de* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!}$.

2. *En notant $f(x)$ la somme de cette série, en déterminer un équivalent simple lorsque $x \to +\infty$.*

III. Développements en séries entières

III.1 Généralités sur les fonctions développables en séries entières

Définition III.1 (Fonction développable en série entière). *Soit f une fonction définie au voisinage de 0 (dans $\mathbb{K}$). On dit que f est développable en série entière au voisinage de 0, s'il existe $r > 0$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que pour tout $z \in \hat{B}(0, r)$,*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n.$$

Pour un $r > 0$ tel que cette égalité soit satisfaite, on dira que f est développable en série entière sur $\hat{B}(0, r)$.
Dans cette définition, si R est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, on a nécessairement $r \leq R$, mais pas nécessairement l'égalité.

Proposition III.2 (CN, et unicité du développement en série entière). *Soit f une application définie au voisinage de 0 (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors, pour que f soit développable en série entière, la fonction de la variable réelle $f_{\mathbb{R}}$, définie au voisinage de 0 doit être de classe $\mathcal{C}^\infty$ et le développement s'écrit alors*

$$\forall z \in \hat{B}(0, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad \text{avec } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

En particulier, en cas d'existence, le développement en série entière est unique.

Remarque III.3 (Lien avec la série de Taylor). 1. *Lorsque f est DSE de la variable réelle, la série entière associée est nécessairement égale à la série de Taylor $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.*

2. *Réciproquement, pour f de classe $\mathcal{C}^\infty$, la série de Taylor en 0 peut converger sur un intervalle $]-r, r[$ sans être égale à f. Dans ce cas, f ne peut pas être développable en série entière.*

Exemple III.4. *Soit f définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, que sa série de Taylor converge sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais que f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.*

Proposition III.5 (Opérations sur les fonctions développables en séries entières)**.** *Soit f et g deux fonctions développables en séries entières au voisinage de 0, et $\lambda \in \mathbb{C}$, dont le DSE est donné respectivement par $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Alors :*

1. *$f + \lambda g$ est développable en série entière, de DSE $\sum (a_n + \lambda b_n) z^n$;*
2. *fg est développable en série entière, de DSE égal au produit de Cauchy de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.*

III.2 DSE de l'exponentielle

On commence par redéfinir de façon propre la fonction exponentielle réelle.

Proposition III.6 (Définition de l'exponentielle réelle)**.** *Il existe une unique fonction f développable en série entière sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est appelée exponentielle, notée $\exp(x)$, et vérifie*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Éléments de preuve. Rechercher f sous la forme $\sum a_n x^n$, dériver et injecter dans l'équation différentielle. La relation sur (a_n) et la condition en 0 déterminent entièrement (a_n). □

Remarque III.7.

1. *Retenir cette méthode de recherche de développement en s'aidant d'une équation différentielle. Cela permet de trouver de façon efficace le DSE de fonctions solutions d'équations différentielles. Il est assez fréquent de commencer par rechercher ainsi les solutions développables en série entière d'une ED, qui aident souvent à trouver les autres.*
2. *Une fois l'existence d'une telle fonction obtenue, toutes les propriétés vue en première année sont valides. En particulier, les propriétés liées à la résolution des équations différentielles d'ordre 1. En particulier, le théorème de Cauchy Lipschitz pour les équations différentielles d'ordre 1 est vérifié, ce qui assure en particulier l'unicité de la solution de $f' = f$, tel que $f(0) = 1$. On en déduit que la fonction exp est non seulement unique parmi les fonctions DSE, mais également parmi toutes les fonctions dérivables.*

Proposition III.8 (DSE de cos et sin)**.** *La fonction $\varphi : t \mapsto \cos(t) + i\sin(t)$ vérifie l'équation différentielle $\varphi' = i\varphi$, et $\varphi(0) = 1$, donc l'unique solution développable en série entière est*

$$t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!}.$$

Ainsi cos et sin sont DSE, et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

De plus, on définit, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(it) = e^{it} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \cos(t) + i\sin(t).$$

Éléments de preuve. Même technique que pour exp, mais maintenant on connaît par avance l'unicité de la solution de cette ED. □

Remarque III.9. *On peut aussi trouver les DSE de cos et sin en montrant que le reste de Taylor-Lagrange tend vers 0, par exemple avec l'inégalité de Taylor-Lagrange.*

La définition suivante est un rappel :

Définition III.10 (Exponentielle complexe)**.** *Pour $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit*

$$\exp(z) = e^z = e^x e^{iy}.$$

Théorème III.11 (DSE de l'exponentielle complexe)**.** *La fonction exp est DSE sur $\mathbb{C}$ et*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Éléments de preuve. Par produit de Cauchy. □

III.3 DSE usuels

Définition III.12 (Coefficient binomial étendu)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.*

Proposition III.13 (DSE usuels)**.**

1. $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ *pour* $z \in \mathbb{C}$;
2. $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ *pour* $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$
3. $\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)\cdots(n+p-1)}{p!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{-p}{n} z^n$ *pour* $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, $p \in \mathbb{N}^*$;
4. $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ *pour* $x \in]-1, 1[$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
5. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, *pour* $x \in]-1, 1[$,
6. $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, *pour* $x \in \mathbb{R}$;
7. $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, *pour* $x \in \mathbb{R}$;
8. $ch(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, *pour* $x \in \mathbb{R}$;
9. $sh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, *pour* $x \in \mathbb{R}$;
10. $Arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, *pour* $x \in]-1, 1[$.

Éléments de preuve.

1. Vu au paragraphe précédent
2. Somme géométrique.
3. Produits de Cauchy
4. Résolution de l'ED $(1+x)y' = ay$.
5. Par intégration (ou, ce qui revient en même, en dérivant cette série entière).
6. Vu précédemment
7. Vu précédemment
8. À partir du DSE de l'exponentielle
9. Idem
10. Par intégration.

□

Exercice III.14 (Calcul de DSE). *Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions f suivantes. On précisera le domaine de validité du DSE.*

1. $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$
2. $f(x) = \ln \frac{2-x}{3-x^2}$
3. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
4. $f(x) = \arctan \frac{x \sin a}{1 - x \cos a}$, $a \in \mathbb{R}$
5. $f(x) = \cos x \operatorname{ch} x$
6. $f(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t^2+t^4}$.

Déduire du 5 la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{2k}$.

Exercice III.15 (Série génératrice associée à une suite récurrente). *Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} u_n + 2$. Exprimer une équation différentielle satisfaite par la série $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$, et résoudre cette équation différentielle (on laissera l'expression sous forme intégrale).*

Exercice III.16 (Un théorème tauberien). *Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On note $f(x)$ sa somme. On suppose $na_n \to 0$ et $f(x) \to S$ lorsque $x \to 1^-$.*

1. *En considérant $u_n = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p - \sum_{p=0}^{n} a_p$, montrer que $\sum a_n$ converge, et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$ (Tauber).*
2. *Même question si on ne suppose plus $na_n \to 0$, mais en revanche $a_n \geq 0$ pour tout n.*
3. *Même question si on remplace l'hypothèse $na_n \to 0$ par l'hypothèse de convergence de $\sum n|a_n|^2$ (Fejer).*

Exercice III.17 (Mines 2015).
1. *Donner le domaine de définition dans $\mathbb{R}$ de la série entière $\sum_{n \geq 1} \ln(n) x^n$.*
2. *Déterminer un équivalent de la somme f de cette série entière en 1 puis en -1.*