Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique • Mathématiques

Familles sommables et cardinaux

Mouad El Assadi

Professeur agrégé de mathématiques

Ingénieur d'État en génie civil — École Hassania des Travaux Publics (EHTP)

elassadimouad1@gmail.com

Table des matières

I Rappels sur les cardinaux finis **2**
I.1 Ensembles finis, cardinaux 2
I.2 Rappel des propriétés calculatoires sur les cardinaux 2
I.3 Grands principes combinatories 3

II Dénombrabilité **5**
II.1 Cardinaux infinis 5
II.2 Dénombrabilité 6
II.3 Règles opératoires sur les ensembles dénombrables 7
II.4 Des ensembles infinis non dénombrables 7
II.5 Familles sommables de nombres réels positifs 8
II.6 Famille sommable de nombres complexes 10

III Autour de la série exponentielle **14**
III.1 La série exponentielle 14
III.2 Lien avec la fonction exponentielle 15

IV Dérivée des séries géométriques **15**

V Identités obtenues par développement **16**

Avant d'entamer l'étude des familles sommables, Nous faisons quelques rappels sur les cardinaux finis, et leur utilisation dans des questions de dénombrement. Dans un second temps, nous quittons les révisions pour aborder le problème des cardinaux infinis, beaucoup moins intuitif, l'objectif étant l'étude des ensembles de même cardinal que $\mathbb{N}$, qu'on appelle ensembles dénombrables. Ces ensembles joueront un rôle centrale dans la notion de familles sommables.

I. Rappels sur les cardinaux finis

I.1 Ensembles finis, cardinaux

Nous rappelons la définition du cardinal d'un ensemble fini :

Définition I.1 (Cardinal d'un ensemble fini)**.** *Soit E un ensemble.*
- On dit que E est un ensemble fini s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection $[1,n] \to E$. - L'entier n est alors unique, est appelé cardinal de E, et est noté $|E|$ ou Card(E) ou $\sharp E$.

Éléments de preuve. L'unicité de n provient du fait qu'il ne peut pas exister de bijection de $[1,n]$ dans $[1,m]$ si $n \neq m$, ce qui n'est pas si évident que cela à montrer si on ne dispose d'aucun outil de cardinalité. Cela peut se faire en montrant par récurrence sur n que si $m \neq n$ et $f : [1,n] \to [1,m]$, alors f n'est ni injective ni surjective. Pour passer de n à $n+1$, considérer $f(n+1)$. Quitte à composer par une transposition bijective, on peut considérer que $f(n+1) = m+1$, ce qui permet d'enlever n d'un côté, m de l'autre (avec une discussion à faire), pour se ramener à l'hypothèse de récurrence. □

Lemme I.2. *Tout sous-ensemble F de $[1,n]$ peut être mis en bijection avec un ensemble $[1,m]$, avec $m \leq n$.*

Éléments de preuve. On peut ranger les éléments de F dans l'ordre : $F = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_m\}$. □

Proposition I.3 (Sous-ensemble d'un ensemble fini)**.** *Soit F un sous-ensemble de E. Si E est fini, alors F aussi.*

Éléments de preuve. Restreindre et corestreindre une bijection $E \to [1,n]$ et utiliser le lemme. □

I.2 Rappel des propriétés calculatoires sur les cardinaux

Lemme I.4 (Réexpression du cardinal)**.** *Soit E un ensemble fini, et A un sous-ensemble de E. Alors*

$$|A| = \sum_{k \in E} \mathbb{I}_A(k).$$

Éléments de preuve. C'est évident intuitivement. Pour une bonne formalisation, par une bijection, on peut se ramener au cas où $A = [1,p]$ et $E = [1,n]$. □

Proposition I.5 (Cardinal d'une union disjointe)**.** *Soit $A, B, A_1, \ldots, A_n$ des ensembles finis.*
1. Si $A \cap B = \emptyset$, alors $|A \cup B| = |A| + |B|$. 2. Plus généralement, si pour tout $(i,j) \in [1,n]^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, alors

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

Éléments de preuve. Le point 2 s'obtient du point 1 par récurrence. Le point 1 résulte du lemme et des propriétés des sommes. □

Proposition I.6 (Cardinal d'un complémentaire). *Si $A \subset B$, alors $|\mathcal{C}_B A| = |B| - |A|$.*

Éléments de preuve. Écrire l'un des trois ensembles en jeu comme union disjointe des deux autres. □

Corollaire I.7 (Cardinal d'un sous-ensemble). *Si $A \subset B$, alors $|A| \leq |B|$, avec égalité si et seulement si $A = B$.*

Éléments de preuve. Quel est le cardinal de $\mathcal{C}_B A$ lorsqu'on est dans le cas d'égalité ? □

Proposition I.8 (Cardinal d'une union quelconque). *Soit A et B des ensembles finis. On a :*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Éléments de preuve. On peut décomposer en $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$. □

Proposition I.9 (Cardinal d'un produit cartésien). *1. Soit A et B deux ensembles finis. Alors $|A \times B| = |A| \times |B|$. 2. Plus généralement, soit $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles finis. Alors*

$$|A_1 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Éléments de preuve. Le point 2 s'obtient du 1 par récurrence. Pour le point 1, découper en tranche, ou utiliser une bijection de $[0, nm-1]$ dans $[0, n-1] \times [0, m-1]$ définie par une opération arithmétique classique. □

I.3 Grands principes combinatories

Par définition même :

Proposition I.10 (Injectivité, surjectivité, bijectivité et cardinal). *Soit E et F deux ensembles finis, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors : 1. Si f est bijective, Card(E) = Card(F). 2. Si f est injective, Card$(E) \leq$ Card(F). 3. Si f est surjective, Card$(E) \geq$ Card(F)*

Éléments de preuve. Restreindre ou corestreindre de façon adéquate, de sorte à se ramener à une bijection.
Cela incite, pour des dénombrements (ou calculs de cardinaux, à se ramener par une bijection, à des modèles simples et connus). □

Méthode I.11 (Combinatoire bijective). *Pour dénombrer un ensemble fini E (c'est-à-dire pour déterminer son cardinal), une méthode classique consiste à le mettre en bijection avec un ensemble dont le cardinal est connu.*

Exemple I.12. *Par définition des coefficients binoniaux, le cardinal de $P_k([1, n])$ est $\binom{n}{k}$. En déduire le nombre de l'ensemble des chemins monotones de $(0, 0)$ à (a, b) dans N^2, chaque pas étant de longueur 1, et se faisant vers la droite ou vers le haut.*

Méthode I.13 (Tri, partitionnement, principe additif). *Si on peut trier les objets de E en plusieurs paquets disjoints $E_1, \ldots, E_n$ de cardinaux respectifs $a_1, \ldots, a_n$, alors le cardinal de E est*

$$E = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Exemple I.14. *Formule sommatoire, ou lemme de la chaussette :*

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}.$$

Méthode I.15 (Choix successifs, principe multiplicatif)**.** *Dénombrer un ensemble se fait souvent en s'intéressant à la façon de construire un élément, en décomposant sa construction de façon élémentaire en plusieurs étapes. Si un élément se construit en 2 étapes, et que : - la première étape peut se faire de a façons différentes ; - pour chaque choix de première étapes, la deuxième étape peut se faire de b façons différentes (le nombre b ne dépendant pas de la première étape) ; - toutes les constructions faites ainsi sont distinctes*

alors le nombre total d'éléments est ab.

Éléments de preuve. Une formalisation passe par un partitionnement de l'ensemble E dénombré en

$$\bigcup_{k\in[1,a]} E_k$$

, où on a rangé les éléments à dénombrer dans des ensembles E_k, en les triant suivant le résultat de la première étape. La troisième hypothèse certifie que l'union est disjointe (ce qui est représenté par le signe $+$ dans l'union), et la deuxième hypothèse assure que les E_k sont tous de cardinal b. Cette formalisation est équivalente au lemme du berger, stipulant que si $f : E \to F$ est une surjection telle que les images réciproques $f^{-1}(\{y\})$ aient toutes même cardinal b, alors $|E| = b|F|$. □

Exemple I.16. *Dénombrement des injections, cardinal de $\mathfrak{S}_n$.*

Remarque I.17. *Les deux méthodes peuvent être combinées, par exemple un tri, et pour chaque part du tri, une succession de choix.*

Exemple I.18. *Formule de Vandermonde :*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

Méthode I.19 (Formalisation par couple, et lecture inverse)**.** *Une formalisation mathématique de deux choix successifs peut se faire sous forme d'un couple, en mettant E en bijection avec un ensemble F de couples (x, y) où x est le résultat du premier choix, y le résultat du deuxième choix. Il y a souvent des contraintes entre x et y (liés à la façon de procéder au second choix). Ces contraintes définissent une propriété satisfaite par x et y, qu'on note $P(x, y)$. Ainsi*

$$F = \{(x, y) \mid P(x, y)\}$$

Sous cette forme on peut voir que la contrainte peut souvent être retournée en lisant le couple dans l'autre sens : F et clairement en bijection avec

$$G = \{(y, x) \mid P(x, y)\}$$

Cela revient à intervertir le rôle des deux étapes, donc l'ordre dans lequel on effectue la construction.

Exemple I.20. *La formule du capitaine, ou comité-président.*

Méthode I.21 (Démonstration ou interprétation combinatoire d'une formule)**.** *- Interpréter combinatoriement une formule permet d'en avoir une compréhension intuitive et naturelle, qui aide à la retenir ou à la retrouver. - Cela permet également éventuellement de la démontrer, comme la formule de Vandermonde ci-dessus. - Pour démontrer ou interpréter combinatoriement une formule, chercher un modèle adéquat, et dénombrer de deux façons différentes, par exemple de façon directe et en effectuant un tri, ou bien en effectuant des choix successifs dans des ordres différents etc.*

Exemple I.22. *Interpréter combinatoriement la formule*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Méthode I.23 (Signes, principe de l'interrupteur)**.** *- Une formule combinatoire ne contient a priori que des termes positifs. Certaines formules contenant aussi des signes négatifs peuvent quand même se démontrer combinatoriement, en réarrageant l'égalité de sorte à passer les termes négatifs de l'autre côté. On a alors deux quantités à comparer, ce qu'on peut faire combinatoriement, par exemple en établissant des bijections. - Une situation classique : des signes qui alternent devant une expression avec des coefficients binomiaux : il s'agit de comparer des ensembles ayant des cardinaux de parité différente pour cela, faire entrer ou sortir un élément (interrupteur qu'on allume ou éteint). On illustre cela dans l'exemple qui suit, qui est à peu près le plus simple du genre.*

Exemple I.24. *Montrer combinatoriement que*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \text{ si } n > 0.$$

II. Dénombrabilité

II.1 Cardinaux infinis

On ne peut pas définir d'emblée (en tout cas pas simplement) de cardinal d'un ensemble fini. Cantor fait une construction (compliquée) qui permet de définir des cardinaux (ou plutôt des classes cardinales) de façon explicite, mais ce n'est pas l'objet de ce cours. Nous nous contentons de définir la condition d'égalité des cardinaux.

Définition II.1 (Ensembles de même cardinal)**.** *Soit E et F deux ensembles. - On dit que E et F ont même cardinal s'il existe une bijection $f : E \to F$. On dit aussi que E est équipotent à F. - On dit que E est subpotent à F (ou que le cardinal de E est strictement inférieur à celui de F) s'il existe une injection de E dans F.*

Remarque II.2 ((HP))**.** *- On peut montrer que la relation de subpotence vérifie les propriétés d'une relation d'ordre sur les classes cardinales. L'antisymétrie provient d'un théorème classique dû à Cantor et Berstein, affirmant que s'il existe une injection $f : E \to F$, et une injection $g : F \to E$, alors il existe une bijection $E \to F$. - Avec l'axiome du choix, on peut montrer que cette « relation d'ordre » est totale.*

Attention, certaines intuitions sur les comparaisons de cardinaux d'ensembles finis peuvent être fausses dans ce contexte.

Remarque II.3 (Avertissement)**.** *Deux ensembles vérifiant une inclusion stricte $E \subsetneq F$ peuvent être de même cardinal. Pourtant F contient strictement plus d'éléments que E.*

Exemple II.4 (Hôtel de Hilbert)**.** *$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ tel que $f(n) = n + 1$ est une bijection. Donc $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ ont même cardinal.*

II.2 Dénombrabilité

Définition II.5 (Ensemble dénombrable)**.** *Soit E un ensemble. On dit que : - E est dénombrable s'il est de même cardinal que $\mathbb{N}$; - au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.*
Ainsi, E est dénombrable si et seulement s'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to E$.

Proposition II.6 (Dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$)**.** *Le produit cartésien $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.*

Éléments de preuve. Construire une bijection en diagonales. Ou bien utiliser une bijection classique entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}^*$, basée sur l'étude des facteurs pairs de la décomposition de n en produit de facteurs premiers. □

Nous souhaitons caractériser les ensembles au plus dénombrables à l'aide des sous-ensembles de $\mathbb{N}$. Pour cela, nous commençons pas établir un lemme sur le cardinal des sous-ensembles de $\mathbb{N}$.

Lemme II.7. *Tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable.*

Éléments de preuve. Considérer un sous-ensemble $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, non fini. Construire par récurrence une application injective de $[0, n]$ dans E, en rajoutant à chaque étape le minimum des éléments non encore utilisés. Cela définit une bijection $\mathbb{N} \to E$. □

Proposition II.8 (Première caractérisation des ensembles au plus dénombrables)**.** *Un ensemble E est au plus dénombrable si et seulement s'il peut être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.*

Éléments de preuve. Un sens est évident par les définitions de la finitude ou de la dénombrabilité. L'autre provient du lemme. □

Nous donnons une deuxième caractérisation des ensembles au plus dénombrables en terme de surjection ou d'injection. Cette caractérisation est plus souple pour prouver les différentes propriétés de dénombrabilité liées aux constructions ensemblistes. Cette caractérisation nécessite un petit lemme.

Lemme II.9 (Inversibilité à gauche ou droite des injections et surjections)**.** *Soit $f : E \to F$. 1. Si f est injective, il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$, et g est alors surjective. 2. Si f est surjective, il existe $g : E \to F$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$, et g est alors injective.*

Éléments de preuve. On construit g associant à y un antécédent de ses antécédents. Dans le premier cas, on n'a pas le choix quand on est dans l'image de f, et sinon, on définit g comme on veut. Dans le deuxième cas, on doit choisir parmi les antécédents de y. □

Remarque II.10. • *Ce sont en fait des équivalences.* • *On utilise l'axiome du choix (qui affirme la possibilité de pouvoir faire simultanément une infinité de choix).*

Proposition II.11 (Deuxième caractérisation des ensembles au plus dénombrables)**.** *Soit E un ensemble non vide. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes : (i) E est au plus dénombrable (ii) il existe une fonction injective $f : E \to \mathbb{N}$. (iii) il existe une fonction surjective $f : \mathbb{N} \to E$.*

Éléments de preuve. • $(i) \implies (ii)$: considérer une bijection $E \to F \subset \mathbb{N}$, et composer par l'injection canonique. • $(ii) \implies (iii)$: c'est l'inversibilité à gauche d'une injection • $(iii) \implies (ii)$: c'est l'inversibilité à droite d'une surjection. Pourquoi l'axiome du choix n'est-il pas nécessaire ici ? • $(ii) \implies (i)$: corestriction à l'image. □

II.3 Règles opératoires sur les ensembles dénombrables

Proposition II.12 (Construction d'ensembles dénombrables)**.** *1. Si E et F sont au plus dénombrables, alors $E \times F$ est au plus dénombrable. 2. Plus généralement, un produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ d'un nombre fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. Si l'un d'eux est dénombrable et les autres non vides, alors le produit est dénombrable. 3. Une union d'un nombre au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. Si l'un des ensembles est dénombrable, l'union est dénombrable.*

Éléments de preuve. 1. Construire une surjection par composition : $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to E \times F$ 2. Récurrence 3. Supposons les ensembles indexés sur I dénombrable. Construire une surjection

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to I \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} A_i.$$

□

Corollaire II.13. *1. L'ensemble Z est dénombrable. 2. L'ensemble N° est dénombrable. 3. L'ensemble Q des rationnels est dénombrable.*

Un résultat important sur les familles sommables découle de ces propriétés. On rappelle la définition suivante.

Définition II.14 (Support d'une famille de scalaires)**.** *Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes. Le support de a est l'ensemble*

$$J = \{i \in I \mid a_i \neq 0\}.$$

Proposition II.15 (Support d'une famille sommable)**.** *Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes. Si a est sommable, alors le support de a est au plus dénombrable.*

Éléments de preuve. Se ramener au cas d'une famille réelle positive, en contrôlant le support de a en fonction de celui des parties positives et négatives de ses parties réelles et imaginaires. Dans le cas positif, exprimer le support en fonction des

$$I_\varepsilon = \{i \in I \mid a_i > \varepsilon\}.$$

Que peut-on dire du cardinal de I_ε ? □

II.4 Des ensembles infinis non dénombrables

Comme on l'a vu, des ensembles qui semblent bien plus gros que N sont dénombrables, donc ont dans les faits « autant » d'éléments que N. Une question qui peut se poser alors est de savoir si tous les ensembles infinis ont même cardinal, ou s'il existe d'autres cardinaux (plus gros). Un premier élément de réponse provient de l'étude du cardinal de R, à partir de l'écriture décimale d'un nombre réel. On rappelle qu'un nombre réel admet un et un seul développement décimal, à condition d'exclure les développements terminant uniquement par une infinité de 9.

Théorème II.16 (Cardinal de R, Cantor)**.** *L'ensemble des réels R est non dénombrable.*

Éléments de preuve. (démonstration non exigible) Sinon, considérer une énumération $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de tous les réels, et considérer un y tel que le n-ième chiffre après la virgule de y soit distinct de 0, 9 et du n-ième chiffre de x_n. Le réel y peut-il être dans l'énumération ? Pourquoi prendre la précaution de prendre les chiffres distincts de 0 et 9 ? □

Cette preuve est connue sous le nom d'« argument diagonal de Cantor », dont une généralisation donne un deuxième élément de réponse à la question initiale :

Théorème II.17 (Cantor, HP)**.** *Soit X un ensemble infini. Alors $Card(X) < Card(\mathcal{P}(X))$ (i.e. X est subpotent à $\mathcal{P}(X)$, mais pas équipotent)*

Éléments de preuve. S'il existe une surjection $f : X \to P(X)$, considérer $Y \subset X$ constitué des éléments x tels que $x \notin f(x)$, et obtenir une contradiction en considérant l'appartenance de c à Y, c étant un élément de X tel que $f(c) = Y$. □

On peut donc construire une chaîne infinie d'ensembles ayant des cardinaux strictement croissants. Il y a donc une infinité de cardinaux infinis distincts.

Remarque II.18. *En quoi le résultat précédent empêche-t-il l'existence d'un « ensemble des ensembles » ?*

Familles sommables

Il n'est pas très dur de remarquer qu'en général, changer l'ordre de sommation dans une série modifie la valeur de la somme et même les propriétés de convergence (lorsque la série est semi-convergente initialement). Ainsi, l'ordre dans lequel s'effectue la sommation semble avoir une importance. Dans de nombreuses situations pourtant, on souhaite sommer des valeurs sans avoir un ordre privilégié. C'est le cas par exemple pour les calculs de probabilités, ou d'espérance, n'ayant pas d'ordre privilégié sur l'ensemble des valeurs prises par une variable X, n'ayant pas la possibilité en général de les numéroter dans l'ordre croissante, s'il y a des points d'accumulation). Nous présentons dans ce chapitre un moyen de s'affranchir de cet ordre de sommation sous certaines hypothèses.

II.5 Familles sommables de nombres réels positifs

On rappelle que l'opération $a + \infty$ est bien définie, égale à $+\infty$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+$. En particulier, tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}_+$ peut être sommé dans $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, $\mathbb{R}_+$ peut être muni d'une relation d'ordre total prolongeant l'ordre de $\mathbb{R}_+$ en posant $+\infty > a$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+$. Tout sous-ensemble X de $\mathbb{R}_+$ admet alors une borne supérieur dans $\mathbb{R}_+$ muni de cet ordre :

- s'il est non vide et majoré par un réel, d'après la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$
- s'il est non vide et majoré par aucun réel, alors $+\infty$ est son seul majorant, donc aussi le plus petit des majorants.
- s'il est vide, tout élément de $\mathbb{R}_+$ est un majorant donc le plus petit des majorants (la borne supérieure) est 0.

Remarquez l'importance de bien préciser l'ensemble ordonné de référence pour le dernier cas : la borne supérieure de $\varnothing$ dans $\mathbb{R}_+$ n'est pas la même que dans $\mathbb{R}$ entier. Pour tout ensemble I, on note $P_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.
Pour motiver la définition de la sommabilité, on reexprime la convergence d'une série à termes positifs de façon à ne plus faire intervenir l'ordre (infini) de sommation, grâce à une version symétrisée dans laquelle toutes les sommes finies ont des rôles équivalents, et plus seulement les sommes partielles.

Théorème II.19 (Reexpression de la convergence des STP)**.** *Soit $\sum a_n$ une STP. Alors $\sum_{k=0}^{+\infty} a_n$ est bien définie dans $\mathbb{R}$ et*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_n = \sup \left\{ \sum_{k \in J} a_k,\ J \in P_f(\mathbb{N}) \right\}.$$

En particulier, $\sum a_n$ converge si et seulement si l'ensemble de toutes les sommes finies est majoré.

Éléments de preuve. Toute somme finie est majorée par une somme partielle donc par la somme totale. Réciproquement, les sommes partielles sont des sommes sur une partie finie. □

Cette propriété motive la définition suivante :

Définition II.20 (Somme quelconque de termes positifs). *Soit I un ensemble quelconque et $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$ (éventuellement infinis). On définit*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup_{\mathbb{R}_+} \left\{ \sum_{j\in J} a_j,\ J \in P_f(I) \right\}.$$

Proposition II.21 (Somme d'inégalités). *Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Si pour tout $i \in I$, $a_i \leq b_i$, alors*

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i.$$

Éléments de preuve. Les sommes finies des a_i sont majorées par les sommes finies correspondantes des b_i, donc par la somme totale des b_i. □

Définition II.22 (Sommabilité). *Avec les notations ci-dessus, on dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est **sommable** si $\sum_{i\in I} a_i < +\infty$.*

Proposition II.23 (Sommabilité et somme d'une famille finie). *Si I est fini, et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs (non infinis), alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et sa somme correspond à la somme finie usuelle.*

Éléments de preuve. La somme finie sur I est le maximum (donc la borne supérieure) de l'ensemble des sommes finies. □

Proposition II.24 (STP et familles sommables). *Soit $\sum a_n$ une STP.*

1. *Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ (le terme de gauche étant la somme de la série, le terme de droite étant la somme de la famille sommable).*
2. *En particulier, $\sum a_n$ converge ssi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.*

Corollaire II.25 (Invariance de la somme d'une STP par permutation des termes). *Soit $\sum a_n$ une STP et $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ une permutation de $\mathbb{N}$. Alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}.$$

Cette égalité étant valide dans $\mathbb{R}_+$, en particulier, les deux séries ont même nature.

Éléments de preuve. La permutation σ induit une permutation $J \mapsto \sigma(J)$ de $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$. Ainsi, les sommes finies sont les mêmes pour les deux séries, donc leur borne supérieure aussi. Remarquez que c'est aussi valide pour $i = \varnothing$. □

Remarque II.26. *La somme de termes positifs étant toujours définie dans $\mathbb{R}_+$, les calculs (et les majorations) effectués sur la somme sont valides sans avoir de justification de convergence à faire a priori. Cela nous autorisera dans de nombreux calculs liés à des probabilités (calculs d'espérance) à faire les calculs avant l'étude de convergence et à justifier la convergence a posteriori, par l'obtention d'un résultat non infini. Attention toutefois à n'utiliser cet argument que pour des familles positives !*

On montre le théorème d'associativité ci-dessous, qui est en fait un théorème de sommation par paquets.

Théorème II.27 (Associativité pour les familles positives)**.** *Soit I un ensemble quelconque, $(I_k)_{k\in K}$ un recouvrement disjoint de I. Soit $a = (a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$. Alors*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} a_i\right).$$

Éléments de preuve. Tout sous-ensemble fini J de I est réunion disjointe des $J\cap I_k$ qui sont eux-mêmes finis et dont seul un nombre fini est non vide. Cela donne une première inégalité en passant au sup.
Réciproquement, partir de $K'\subset K$ fini, et $I'_k\subset I_k$ finis. La somme sur les indices correspondants est majorée par la somme totale (dans $\mathbb{R}_+$) passer au sup pour récupérer chacun des I_k. Puis encore le sup pour récupérer K. □

Exemple II.28. *Montrer la divergence de la série harmonique en utilisant la sommation par paquets avec les paquets :*

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad J_k = [2^k, 2^{k+1}-1].$$

Corollaire II.29 (Théorème de Fubini positif)**.** *Soit I et J deux ensembles quelconques, et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$. Alors*

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{i,j}.$$

Éléments de preuve. Il suffit d'écrire $I\times J = \bigcup_{i\in I}\{i\}\times J = \bigcup_{j\in J} I\times\{j\}$. □

Corollaire II.30. *Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles positives d'éléments de $\mathbb{R}_+$, et $\lambda > 0$. Alors*

$$\sum_{i\in I}(a_i+\lambda b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \lambda\sum_{i\in I} b_i.$$

Éléments de preuve. C'est Fubini, avec $J=\{1,2\}$ (pour séparer a_i et b_i). Sortir λ ne pose pas de problème. Cette relation est valide dans $\mathbb{R}_+$, les termes eux-mêmes pouvant être infinis. En particulier, on obtient alors : □

Corollaire II.31. *Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles positives sommables, et $\lambda > 0$. Alors $(a_i+\lambda b_i)$ est aussi sommable.*

II.6 Famille sommable de nombres complexes

Définition II.32 (Famille sommable)**.**

- *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou complexes. On dit que $(a_i)_{i\in I}$ est **sommable** si la famille de réels positifs $(|a_i|)_{i\in I}$ est sommable, i.e. si $\sum_{i\in I}|a_i| < +\infty$.*
- *On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles sommables indexées sur I. Pour être plus précis, on peut noter $\ell^1(I,X)$ l'ensemble des familles sommables indexées sur I à valeurs dans $X\subset\mathbb{C}$.*

Remarque II.33.

- *Toute famille finie est sommable.*
- *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable ssi $\sum a_n$ est absolument convergente.*

Proposition II.34 (Sommabilité des sous-familles). *Toute sous-famille $(a_j)_{j\in J}$ ($J \subset I$) d'une famille sommable est sommable.*

Théorème II.35 (Théorème de comparaison). *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes et $(v_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs tels que pour tout $i \in I$, $|u_i| \leq v_i$. Si $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in I}$ l'est aussi.*

Éléments de preuve. Sommer les inégalités. □

Proposition II.36 (Caractérisation de la sommabilité par Re, Im, + et -).

- *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels. Alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable ssi $(a_i^+)_{i\in I}$ et $(a_i^-)_{i\in I}$ le sont.*
- *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. Alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable ssi $(Re(a_i))_{i\in I}$ et $(Im(a_i))_{i\in I}$ le sont.*

Éléments de preuve. Dans un sens, les parties positives ou négatives se majorent en fonction de $|a_i|$. Dans l'autre, écrire le module comme somme de a_i^+ et a_i^-. Pour le cas complexe, c'est un peu similaire, mais en majorant le module cette fois par la somme des valeurs absolues de la partie réelle et de la partie imaginaire. □

Définition II.37 (Somme d'une famille sommable de réels, de complexes).

- *Soit $(a_i)_{i\in I} \in \ell^1(I, \mathbb{R})$. On définit :*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^-.$$

- *Soit $(a_i)_{i\in I} \in \ell^1(I, \mathbb{C})$. On définit :*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} Re(a_i) + i \sum_{i\in I} Im(a_i).$$

Proposition II.38 (Caractérisation par ε de la somme). *Soit $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ et $S \in \mathbb{C}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $(a_i)_{i\in I} \in \ell^1(I, \mathbb{C})$, *et* $S = \sum_{i\in I} a_i$

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J_\varepsilon \in P_f(I)$ tel que pour tout $K \in P_f(I)$ vérifiant $J_\varepsilon \subset K$,

$$\left| S - \sum_{i\in K} a_i \right| \leq \varepsilon.$$

Éléments de preuve. Pour le sens direct, commencer par le cas de familles de réels : pour le sens direct, remarquer que $I = I_+ \cup I_-$, où I_+ est l'ensemble des indices tels que $a_i \geq 0$, et I_- l'ensemble des indices tels que $a_i < 0$. Approcher $\sum_{i\in I} a_i^+$ et $\sum_{i\in I} a_i^-$ à $\frac{\varepsilon}{2}$ près par des sommes finies sur des sous-ensembles de I_+ et I_-.
Toujours pour le sens direct dans le cas complexe, utiliser le cas réel sur $(Re(a_i))_{i\in I}$ et $(Im(a_i))_{i\in I}$, puis considérer l'union des $J_{\varepsilon/2}$ et $J'_{\varepsilon/2}$ associés.
Réciproquement, si S et S' vérifient tous deux cette propriété, en considérant J_ε et J'_ε associés à chacun des deux complexes S et S', et $K = J_\varepsilon \cup J'_\varepsilon$, montrer que $|S - S'| \leq 2\varepsilon$. □

Théorème II.39 (Linéarité de la somme). *L'ensemble $\ell^1(I)$ est un C-espace vectoriel, et $(a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i$ est une forme linéaire sur $\ell^1(I)$.*

En d'autres termes, si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables de complexes, et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $(a_i + \lambda b_i)_{i\in I}$ est encore sommable, et

$$\sum_{i\in I}(a_i + \lambda b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \lambda \sum_{i\in I} b_i.$$

Éléments de preuve. La sommabilité de la combinaison linéaire est évidente par majoration du module par la somme. La linéarité se montre alors facilement à l'aide de la caractérisation précédente. □

Proposition II.40 (Cas des séries). *Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si elle est absolument convergente. On a alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

De plus, la somme est invariante par permutation des termes.

Éléments de preuve. L'invariance par permutation peut s'obtenir en deux temps, d'abord pour les séries réelles (en utilisant l'invariance par permutation des sommes des a_n^+ et des a_n^-), puis pour les séries complexes (en utilisant l'invariance par permutation des sommes des $\mathrm{Re}(a_n)$ et des $\mathrm{Im}(a_n)$). On peut aussi l'obtenir en une fois par la caractérisation ci-dessus par ϵ, qui est indépendante d'un ordre qu'on se serait donné sur les éléments de I. □

Théorème II.41 (Associativité pour les familles sommables). *Soit $(I_k)_{k\in K}$ un recouvrement disjoint de I. Soit $a = (a_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou complexes. Alors a est sommable si et seulement chaque $(a_i)_{i\in I_k}$ $(k \in K)$ est sommable, de somme s_k et de somme absolue t_k, et si la famille $(t_k)_{k\in K}$ est sommable. Dans ce cas, (s_k) est également sommable, et :*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K} s_k = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} a_i.$$

Éléments de preuve. En décomposant en partie réelle et partie imaginaire, on peut se contenter du cas où les a_i sont réels. En décomposant en partie positive et partie négative, on peut se ramener au cas positif, qu'on a déjà traité. Pour comparer les sommabilités, regarder dans ce cas les conditions pour obtenir une somme finie. □

Exemple II.42. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :*

$$S_n = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3 \mid 2n_1 + 3n_2 + 5n_3 = n\}, \quad s_n = \mathit{Card}(S_n).$$

Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)}.$$

Corollaire II.43 (Théorème de Fubini). *Soit I et J et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels ou complexes.*

- *Alors $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable si et seulement si pour tout $i \in I$, $(a_{i,j})_{j\in J}$ est sommable, et $\left(\sum_{j\in J} |a_{i,j}|\right)_{i\in I}$ est sommable.*
- *On obtient une CNS de sommabilité similaire en intervertissant i et j.*

- *En cas de sommabilité, on a alors :*

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{i,j}.$$

Éléments de preuve. Comme avant, il suffit d'écrire $I \times J = \bigsqcup_{i\in I}\{i\} \times J = \bigsqcup_{j\in J} I \times \{j\}$. La sommabilité peut s'exprimer sur les sommes simples successives plutôt que sur la famille doublement indexée, en vertu du théorème d'associativité. □

Exercice II.44. *Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < 1$. Montrer que la famille $\left(\frac{z^p}{q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.*

Théorème II.45 (Produit de familles sommables)**.** *Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles sommables. Alors $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable, et*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right).$$

Ce résultat se généralise évidemment à un produit d'un plus grand nombre de familles.

Éléments de preuve. La sommabilité peut s'obtenir par l'équivalence exprimée dans le théorème d'associativité (remarque faite après Fubini), ou de façon directe, en majorant la somme des $|a_i b_j|$ sur un sous-ensemble fini de $I \times J$ par la somme sur un produit cartésien fini $I' \times J'$. L'égalité résulte ensuite du théorème de Fubini et de la linéarité. □

Lorsque $I = J = \mathbb{N}$, on repartitionne souvent ensuite $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en diagonales. On obtient :

Exemple II.46. *Soit $q \in]-1, 1[$. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n$ en utilisant une représentation graphique et la sommation par paquets.*

Théorème II.47 (Produit de Cauchy)**.** *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries absolument convergentes. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Alors $\sum_{n\geq 0} c_n$ est absolument convergente, et

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Éléments de preuve. Les hypothèses de sommabilité et le résultat précédent sur le produit de familles sommables assurent la sommabilité de $(a_n b_m)_{(n,m)\in\mathbb{N}}$. Utiliser le théorème d'associativité en partitionnant par les diagonales. □

Exercises :

Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ deux séries. Le **produit de Cauchy** de ces deux séries est la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ définie par :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{i+j=n} a_i b_j.$$

On note souvent $c = a \star b$.

Pour une série $\sum a_n$, on note :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

les sommes partielles, et $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ les sommes (lorsqu'elles existent).

Exercice II.48. *Donner un exemple de deux séries convergentes dont le produit de Cauchy diverge.*

Exercice II.49 (Cesàro). *Soient $\sum a_n, \sum b_n, \sum c_n$ trois séries convergentes avec $c = a \star b$. Montrer que $C = AB$ en vérifiant que $C_n = \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}$.*

Exercice II.50 (Cauchy-Mertens). *Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries numériques convergentes, la première étant absolument convergente. On se propose de montrer que leur série produit de Cauchy $c = a \star b$ converge vers le produit AB de leurs sommes respectives.*

a) Montrer que l'on peut supposer $B = 0$.

b) Vérifier que $\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n} a_k B_{n-k}$ et montrer que cette suite tend vers 0. Conclure.

Exercice II.51 (Pringsheim). *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles décroissant vers 0, et $w = u \star v$. Montrer que $\sum (-1)^{n-1} w_n$ converge si et seulement si la suite (w_n) tend vers 0.*

Exercice II.52. *Étudier la sommabilité des familles :*

$$\left(\frac{1}{(m+n)^a}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}, \quad a > 0; \qquad \left(\frac{1}{(m^2 - mn + n^2)^a}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}.$$

Exercice II.53. *Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls telle que, pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \neq n$, on ait $|z_n - z_m| \geq 1$. Montrer que, pour $\alpha > 2$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^{-\alpha}$ converge.*

III. Autour de la série exponentielle

III.1 La série exponentielle

Définition III.1 (série exponentielle). *La série exponentielle de paramètre $z \in \mathbb{C}$ est la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$.*

Théorème III.2 (Convergence de la série exponentielle). *La série exponentielle est absolument convergente, quelle que soit la valeur de $z \in \mathbb{C}$. Sa somme définit une fonction notée momentanément*

$$e(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Théorème III.3 (Propriété remarquable de l'exponentielle). *Soit z et z' deux complexes. Alors*

$$e(z+z') = e(z)e(z').$$

Éléments de preuve. Calculez $e(z)e(z')$ sous forme d'un produit de Cauchy. □

Corollaire III.4 (Propriété de morphisme de l'exponentielle). *e est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.*

Éléments de preuve. Il reste à vérifier que e est bien à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. La propriété remarquable et le fait que $e(0) = 1$ nous assure de l'inversibilité de $e(z)$. □

III.2 Lien avec la fonction exponentielle

Théorème III.5 (Développements de exp, cos, sin)**.** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \textit{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Éléments de preuve. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, en majorant le reste. □

Corollaire III.6. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e(z) = e^z$, i.e. :*

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Éléments de preuve. Le théorème précédent le donne pour les réels et pour les imaginaires pures. Terminer en utilisant la propriété remarquable de l'exponentielle. □

Méthode III.7 (Calcul de $\sum P(n)\frac{x^n}{n!}$)**.** *Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Décomposer P sur la base $1, X, X(X-1), \ldots, X(X-1)\ldots(X-n+1)$, séparer, simplifier les termes supérieurs de la factorielle.*

Exemple III.8.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (n^3+1)\frac{2^n}{n!}.$$

IV. Dérivée des séries géométriques

On justifie dans ce paragraphe que la série géométrique peut être dérivée terme à terme de la variable complexe z, en dérivant le monôme z^n de la même manière que pour les réels. Sachant exprimer (et dériver comme dans $\mathbb{R}$) la somme géométrique, ce résultat s'exprime ainsi :

Théorème IV.1 (Formule du binôme négatif)**.** *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout nombre complexe tel que $|z| < 1$, la série ci-dessous est absolument convergente, et*

$$\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\ldots(n-p+1)z^{n-p} = \frac{p!}{(1-z)^{p+1}}.$$

Cette formule peut se réécrire

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} z^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n.$$

Éléments de preuve. Récurrence sur p, en multipliant à chaque étape par la série géométrique, à l'aide d'un produit de Cauchy. □

Le cas réel se montre aussi par Taylor avec reste intégral, et s'adapte de façon plus générale au développement de $(1+x)^\alpha$.

Méthode IV.2 (Calcul de $\sum P(n)x^n$)**.** *($P \in \mathbb{C}_n[X], x \in B(0,1)$) Décomposer P sur la base $(X+1)(X+2)\ldots(X+n)$, séparer, cela nous ramène à des sommes du binôme négatif.*

Exemple IV.3.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+2}{3^n}.$$

V. Identités obtenues par développement

Définition V.1 (Fonction zêta de Riemann)**.** *La **fonction zêta de Riemann** est définie pour $\Re(s) > 1$ par :*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Exercice V.2. *Calculer $\sum_{n=2}^{\infty}(\zeta(n) - 1)$.*

Définition V.3 (Indicatrice d'Euler)**.** *La **fonction indicatrice d'Euler** $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ est définie par :*

$$\varphi(n) = \mathit{Card}\{k \in \{1, \dots, n\} \mid \mathit{pgcd}(k, n) = 1\}.$$

Exercice V.4. *Calculer :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{2^n - 1}.$$

Définition V.5 (Constante d'Euler)**.** *La **constante d'Euler** γ est définie par :*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

Exercice V.6. *a) Montrer que l'on a : $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$.*

b) La famille $\left(\frac{(-1)^k}{kn^k}\right)_{n\geq 1, k\geq 2}$ est-elle sommable ? Et si l'on se restreint à $n \geq 2$?

c) Montrer que $\gamma = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\zeta(k)$.