Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique • Mathématiques

Suites et séries de fonctions

Mouad El Assadi

Professeur agrégé de mathématiques

Ingénieur d'État en génie civil — École Hassania des Travaux Publics (EHTP)

elassadimouad1@gmail.com

Table des matières

I Modes de convergences **2**
I.0.1 Convergence simple . . . 2
I.0.2 Convergence uniforme . . . 3
I.0.3 Convergence uniforme locale . . . 4
I.1 Régularité des limites de suites de fonctions . . . 4
I.1.1 Continuité d'une limite uniforme . . . 5
I.1.2 Double-limite . . . 6
I.1.3 Interversion limite-intégrale . . . 6
I.1.4 Dérivabilité et dérivée d'une limite uniforme . . . 7

II Séries de fonctions **9**
II.1 Modes de convergence . . . 9
II.2 Régularité et interversions sur des sommes uniformes . . . 12
II.3 Techniques asymptotiques . . . 13

III Approximations uniformes **15**
III.1 Principes généraux . . . 15
III.2 Approximations uniformes classiques . . . 16

Dans ce chapitre, on étudie les suites et séries de fonctions. De façon naturelle, on peut définir, si elle existe, la valeur point par point (c'est-à-dire la limite de $f_n(x)$) à x fixé, pour une suite (f_n). On peut alors se poser la question de savoir si certaines propriétés des suites f_n passent bien à la limite (par exemple la continuité, la dérivabilité etc) et si cela revient au même de faire certaines opérations terme à terme ou sur la somme totale, par exemple si la somme des intégrales est égale à l'intégrale de la somme (ou de même pour les limites). Il s'agit donc de propriété d'interversion de certains symboles, définis à base de limites. En général ces interversions ne seront pas possibles et il faudra des modes de convergence plus contraignants.

I. Modes de convergences

I.0.1 Convergence simple

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. On munit F de sa topologie naturelle d'e.v.n., associée à une norme quelconque $\|\cdot\|_F$. Soit $A \subset E$. On considère une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A dans F.
Dans certains énoncés, E devra également être muni de sa structure topologique naturelle d'e.v.n., notamment quand il sera question de continuité. Nous noterons dans ce cas $\|\cdot\|_E$ une norme (arbitrairement choisie) de E.
Comme on est en dimension finie, le choix des normes sur E et F n'a pas d'influence sur les propriétés de convergence et de continuité.

Définition I.1 (Convergence simple)**.** *La suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : A \to F$ si pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Autrement dit :*

$$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_x \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_x \implies \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

Proposition I.2 (Unicité de la limite simple)**.** *En cas d'existence, la fonction f est unique.*

Remarque I.3.
1. *La propriété de convergence simple, ainsi que la valeur de la limite simple f, ne dépend pas de la norme sur F.*
2. *L'espace E n'a pas besoin d'être muni d'une norme pour définir la convergence simple.*
3. *Les règles usuelles sur les limites de suites à valeurs dans F s'appliquent (sommes, produits si pertinent etc). Par exemple, si (f_n) et (g_n) admettent des limites simples f et g, alors $(f_n + \lambda g_n)$ converge simplement vers $f + \lambda g$.*
4. *L'indice x pour désigner le rang N_x dans la définition est indiqué pour insister sur la dépendance de N par rapport à x (il dépend aussi de ε, mais ce point est plus « évident », alors que la dépendance ou non par rapport à x est justement la subtilité qui différencie la convergence simple de la convergence uniforme).*

Exemple I.4. *Étudier la convergence simple de la suite (f_n) où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est définie par :*

1. $f_n(x) = e^{-nx}$;
2. $f_n(x) = nxe^{-nx}$;
3. $f_n(x) = ne^{-nx}$.

Remarque I.5. *Comme on l'a fait remarquer dans le préambule, certaines propriétés ne se conservent pas. Ici, dans le premier cas ($f_n(x) = e^{-nx}$), la continuité des f_n n'est par exemple pas préservée au passage à la limite simple f. Il faut, pour que ce soit le cas, un mode de convergence plus fort.*

I.0.2 Convergence uniforme

Définition I.6 (Convergence uniforme). 1. *On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (sur A) si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

2. *Soit $B \subset A$. On dit que (f_n) converge uniformément sur B si $((f_n)_{|B})$ converge uniformément, donc si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in B, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

Remarque I.7. 1. *La différence essentielle avec la convergence simple est l'indépendance de N par rapport à x. La convergence est donc « aussi rapide » en chaque point.*

2. *Graphiquement, pour des fonctions réelles, cela signifie qu'à partir d'un certain rang, la courbe de f_n est dans un « tube » de rayon ε autour de la courbe de f.*

3. *La quantité $\|f_n - f\|_\infty$ étant bien définie dans $\mathbb{R}$ (égale à $+\infty$ si $f - f_n$ n'est pas bornée), la définition peut se réexprimer de la façon suivante :*

$$\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Proposition I.8 (CVU par majoration uniforme). *S'il existe une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (indépendante de x) telle que pour tout $x \in A$,*

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq M_n,$$

et telle que $\lim M_n = 0$, alors (f_n) converge uniformément vers f.

Proposition I.9 (Limite simple / limite uniforme). *Si f_n converge uniformément vers f, alors elle converge aussi simplement vers f.*
Ainsi, la limite uniforme, si elle existe, est égale à la limite simple.

Proposition I.10 (Caractérisation de la CVU par convergence dans un e.v.n.). *Soit $f_n, f : A \to F$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *(f_n) converge uniformément vers f sur A.*

(ii) *$(f_n - f)$ est bornée à partir d'un certain rang n_0, et $(f_n - f)_{n\geq n_0}$ converge vers 0 dans $\mathcal{B}(A, F)$.*

Méthode I.11 (Étudier la convergence uniforme).
- *Étudier la limite simple pour trouver le seul candidat f à être la limite uniforme.*
- *Majorer $\|f_n(x) - f(x)\|$ indépendamment de x par une suite numérique qui tend vers 0.*

Exemple I.12. 1. *Parmi les exemples précédents, y en a-t-il qui CVU sur $\mathbb{R}_+$? sur $[a, +\infty[$, $a > 0$?*

2. *Étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ des suites définies par :*

$$f_n(x) = e^{-(x+n)^2}, \quad g_n(x) = e^{-(x+\frac{1}{n})^2}.$$

3. *Étudier la convergence uniforme sur $B(0,r)$ de la suite $(A(z)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $r\in]0,1[$, $p\geq 2$ est fixé et $A:\mathbb{C}\to\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est définie par*

$$A(z)=\begin{pmatrix} z & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & z & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & z & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & z\end{pmatrix}.$$

Proposition I.13 (Condition nécessaire de CVU)**.** *Supposons que (f_n) converge uniformément vers f sur A. Alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A^{\mathbb{N}}$, $f_n(x_n)-f(x_n)\to 0$.*

Méthode I.14 (Montrer qu'une suite ne converge pas uniformément)**.** *Utiliser la contraposée de la propriété précédente : pour montrer que (f_n) ne converge pas uniformément vers f, il suffit de trouver $(x_n)\in A^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(x_n)-f(x_n)$ ne converge pas vers 0.*

Exemple I.15. 1. *Reprendre les exemples précédents.*

2. *Étudier la CVU sur $\mathbb{R}$ de (f_n) définie par $f_n(x)=\cos\left(\frac{x}{n}\right)$.*

I.0.3 Convergence uniforme locale

Comme on le verra un peu plus loin, la convergence uniforme permet de conserver les propriétés de continuité. Comme la continuité n'est qu'une propriété locale, et non globale, il n'est pas nécessaire d'avoir la convergence uniforme sur tout le domaine, mais de l'avoir au voisinage de tout point en lequel on veut établir la continuité.

Définition I.16 (Convergence uniforme locale)**.** *Soit $a\in A$. On dit que (f_n) converge uniformément vers f au voisinage du point a s'il existe un voisinage $V\in\mathcal{V}(a)$ tel que (f_n) converge uniformément vers f sur $V\cap A$.*

Exemple I.17. *Montrer que les trois suites du premier exemple de ce chapitre sont uniformément convergentes au voisinage de tout point de $\mathbb{R}_+^*$, mais pas uniformément convergents sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Dans le cas d'une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on peut se contenter d'étudier la convergence uniforme sur tout segment inclus dans I.

Proposition I.18 (CVU sur un intervalle de $\mathbb{R}$)**.** *Soit $f_n:I\to F$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *(f_n) converge uniformément au voisinage de tout point de I.*

(ii) *(f_n) converge uniformément sur tout segment $[a,b]\subset I$;*

(iii) *Il existe un recouvrement $I=\bigcup_{j\in J}[a_j,b_j]$ tel que (f_n) converge uniformément sur chaque segment $[a_j,b_j]$.*

Dans la pratique, on étudiera par exemple souvent la convergence uniforme locale sur $\mathbb{R}_+^*$ en étudiant la convergence uniforme sur $]0,b]$ (s'il y a un problème d'uniformité en $+\infty$) ou sur $[a,+\infty[$, s'il y a un problème d'uniformité lorsqu'on s'approche de 0, ou sur $[a,b]$, s'il y a des problèmes des deux côtés.

I.1 Régularité des limites de suites de fonctions

Cette section traite essentiellement du passage à la limite d'un certain nombre de propriétés et constructions : la continuité, l'intégration, la dérivation. Ces propriétés et constructions s'expriment ou se définissent toutes en fonction de limites (ou bornes supérieures). Dans tous les cas, il s'agit donc ici d'établir un certain nombre de propriétés d'interversion de limites.

I.1.1 Continuité d'une limite uniforme

Théorème I.19 (Préservation de la continuité par CVU). *Soit (f_n) une suite de fonctions $A \to F$.*

1. *Soit $a \in A$. Si (f_n) converge uniformément vers f au voisinage de a, et si les (f_n) sont continues en a, alors f est continue en a.*
2. *Soit B un ouvert relatif de A. Si (f_n) converge uniformément vers f sur B et si les f_n sont continues sur B, alors f est continue sur B.*
3. *En particulier si (f_n) converge uniformément vers f (sur A entier) et si les f_n sont continues, alors f est continue (sur A).*

Éléments de preuve. Le premier point implique facilement les deux autres. Pour montrer 1, poser un ε et décomposer

$$f(x) - f(a) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a),$$

sur une boule sur laquelle exploiter la convergence uniforme. □

Exemple I.20 (Fonction de Bolzano). *On considère la suite (f_n) de fonctions $[0,1] \to \mathbb{R}$ affines par morceaux, définie par $f_0 = \mathrm{id}_{[0,1]}$, et, f_n étant définie continue, affine sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$, on définit f_{n+1} continue et affine sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{3^{n+1}}, \frac{k+1}{3^{n+1}}\right]$, prenant les mêmes valeurs que f_n sur les $\frac{3k}{3^{n+1}}$, et telle que*

$$f_{n+1}\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}\right) = f_n\left(\frac{3k+2}{3^{n+1}}\right)$$

et

$$f_{n+1}\left(\frac{3k+2}{3^{n+1}}\right) = f_n\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}\right).$$

Montrer que (f_n) converge vers une fonction f et que f est continue.
En représentant les fonctions (f_n), on se doute bien que les irrégularités de plus en plus nombreuses vont être un frein à la dérivabilité. De fait, on peut montrer que f est une fonction continue sur $[0,1]$, mais dérivable en aucun point de $[0,1]$. C'est historiquement le premier exemple d'une fonction continue nulle part dérivable, découvert par Bolzano vers 1830.

Remarque I.21. *Si la propriété de CVU ne porte pas sur A tout entier, attention à l'hypothèse d'ouverture. En particulier, si on travaille dans $\mathbb{R}$, et que A et B sont des intervalles, il faut faire attention aux bornes.*

Exemple I.22. *La suite définie par*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\frac{1}{n} \\ nx+1 & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{n}, 0\right] \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est uniformément convergente sur $[0, +\infty[$, et les f_n sont toutes continues sur cet intervalle. Pourtant, la limite simple sur $\mathbb{R}$, à savoir $\not\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$, n'est pas continue en 0.
On doit se ramener à une convergence uniforme sur un ouvert (relatif, mais ici, $A = \mathbb{R}$ tout entier donc c'est la même chose). Donc tout ce qu'on peut obtenir ici, c'est la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$, qui est bien vérifiée.

Méthode I.23 (Étudier la continuité d'une limite). *Pour étudier la continuité d'une limite d'une suite de fonctions définies sur A, on étudiera d'abord la CVU sur A. S'il n'y a pas CVU sur A, on pourra s'intéresser à la CV locale, en décomposant A comme union d'ouverts relatifs, ou en se ramenant à des segments si A est un intervalle réel.*

I.1.2 Double-limite

La propriété de continuité correspond à une interversion $\lim_{x\to a} / \lim_{n\to+\infty}$: Si (f_n) CVU au voisinage de $a \in A$ en lequel les f_n sont tous continus, alors

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

On peut se demander si une telle propriété subsiste au bord du domaine, lorsque $a \in \overline{A} \setminus A$. Cela reste valide, mais un peu plus délicat, car la valeur de la double-limite est un peu moins accessible.

Théorème I.24 (Théorème de la double-limite)**.** *Soit $f_n : A \to F$ convergeant uniformément vers f sur A, et $a \in \overline{A}$ (éventuellement infini si $E = \mathbb{R}$). On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_n$. Alors (ℓ_n) admet une limite $\ell \in F$, et*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$

Éléments de preuve. La démonstration est hors-programme. Le point délicat est de prouver la convergence de (ℓ_n), car une fois celle-ci acquise, on peut se ramener au théorème de continuité par prolongement. On peut en fait assez facilement montrer d'abord que (ℓ_n) est bornée (en commençant par majorer $\|f_n - f_m\|_\infty$, pour un n_0 convenable), pour trouver une valeur d'adhérence, puis par ε, montrer que $f(x) \longrightarrow \ell$. La convergence de la suite (ℓ_n) s'en déduit par une propriété d'unicité de la limite de f, amenant l'unicité de la valeur d'adhérence de (ℓ_n). □

Ainsi, l'existence de limites (finies) ℓ_n pour tous les f_n assure l'existence d'une limite pour f, égale à la limite des ℓ_n. Ou encore, sous ces hypothèses :

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

C'est donc un théorème d'interversion de limites, comme le théorème de continuité.

Remarque I.25. *Sans hypothèse de CVU, une telle interversion peut être fausse, même si toutes les limites existent.*

Exemple I.26. *La suite définie par $f_n(x) = e^{-nx}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifie :*

$$\lim_{x\to 0^+}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = 1.$$

I.1.3 Interversion limite-intégrale

Nous savons déjà que la limite uniforme d'une suite de fonctions f_n continues sur un segment $[a, b]$ est continue, donc intégrable au sens de Riemann. On peut légitimement se demander si son intégrale est obtenue en passant les intégrales des f_n à la limite. Nous montrons dans un premier temps un résultat un peu plus fort.

Théorème I.27 (Primitivation d'une limite uniforme de fonctions continues)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions d'un segment $[a, b]$ dans un e.v.n. E de dimension finie. On suppose que :*

- *les f_n sont continues ;*
- *(f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.*

On définit la suite

$$F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)dt, \quad \textit{et} \quad F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt.$$

Alors (F_n) converge uniformément vers F sur $[a, b]$.

Éléments de preuve. Remarquer que

$$\left\| \int_a^b f_n(t) - f(t)dt \right\|_E \leq |b-a| \cdot \|f_n - f\|_\infty.$$

□

Corollaire I.28 (Interversion limite uniforme/intégrale). *Soit (f_n) une suite de fonctions d'un segment $[a,b]$ dans un e.v.n. E de dimension finie. On suppose que :*

- *les f_n sont continues ;*
- *(f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*

Alors, f est intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Éléments de preuve. Prendre la limite simple en $x = b$ dans le théorème précédent. □

Remarque I.29. *Ce théorème affirme donc que sous les hypothèses de continuité et de convergence uniforme, on peut intervertir la limite et $\int$, ou, en d'autres termes, « passer à la limite sous l'intégrale » :*

$$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Exemple I.30. *Soit f la fonction de Bolzano définie dans un exemple précédent. Calculer $\int_0^1 f(x)dx$.*

Remarque I.31.

- *L'hypothèse de convergence uniforme est importante.*
- *L'hypothèse de continuité est moins importante, le résultat restant vrai sous la seule hypothèse d'intégrabilité (mais l'intégrabilité de la limite est un peu plus délicate à démontrer).*

Exemple I.32. *Soit f_n définie sur $[0,1]$, pour $n \geq 1$, par*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right] \\ n - n^2 x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Comparer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt$ et $\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt$.

Remarque I.33. *Le théorème d'interversion limite/intégrale en cas de convergence uniforme peut être vu comme un cas particulier assez simple du théorème de convergence dominée, appliqué sur un segment à la suite $(f_n - f)$, dominée à partir d'un certain rang par une fonction constante, intégrable sur un segment.*

I.1.4 Dérivabilité et dérivée d'une limite uniforme

Comme pour la continuité, la dérivabilité d'une limite de suite de fonctions (f_n) dérivables n'est pas nécessairement dérivable. Elle peut aussi être dérivable, mais de dérivée différente de la limite (simple) de la suite (f_n') des fonctions dérivées.

Exemple I.34. *1. Soit f_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ sur $[0,1]$ par*

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{1+\frac{1}{n}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que (f_n) converge uniformément vers une fonction f à déterminer. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $[0,1]$, mais pas f.

2. Soit f_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$.

Montrer que (f_n) converge uniformément vers une limite f, dérivable, mais que (f_n') ne converge pas vers f' sur $[0,1]$.

Ainsi, même une hypothèse de convergence uniforme, portant sur la suite (f_n), n'est pas suffisante. De fait, il faut bien une hypothèse de convergence uniforme pour pouvoir intervertir limite et dérivation, mais elle doit porter sur la suite des dérivées.

Théorème I.35 (Dérivation d'une suite de fonctions)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions définies d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans un e.v.n. F de dimension finie. On suppose que :*

(i) les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I;

(ii) la suite (f_n) converge simplement vers f;

(iii) la suite (f_n') converge uniformément sur I vers une application $g : I \to F$.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = g(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n'(x).$$

L'hypothèse (iii) peut être remplacée par :

(iii') la suite (f_n') converge uniformément sur tout segment inclus dans I.

Éléments de preuve. Appliquer le théorème de primitivation à la suite (f_n'), pour comparer f et $x \mapsto f(a) + \int_a^x g(t)dt$. □

Par récurrence, on obtient facilement la version pour la classe $\mathcal{C}^p$.

Théorème I.36 (Classe $\mathcal{C}^p$ d'une limite)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions définies d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans un e.v.n. F de dimension finie, et $p \in \mathbb{N}$. On suppose que :*

(i) les f_n sont de classe $\mathcal{C}^p$ sur I;

(ii) pour tout $k \in [0, p-1]$ la suite $(f_n^{(k)})$ converge simplement ;

(iii) la suite $(f_n^{(p)})$ converge uniformément sur I.

Alors la limite simple f de la suite (f_n) est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I, et pour tout $x \in I$, et tout $k \in [0,p]$,

$$f^{(k)}(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n^{(k)}(x).$$

L'hypothèse (iii) peut être remplacée par :

(iii') la suite $(f_n^{(p)})$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I.

Exercice I.37. *Soit $I = [a,b]$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que (f_n) converge simplement vers f sur I. On suppose aussi que chaque fonction f_n est croissante, et que f est continue. On fixe $\varepsilon > 0$.*

1. *Justifier l'existence de $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in [a, b]$,*
$$|x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
2. *Soit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ une subdivision de $[a, b]$ avec $x_{i+1} - x_i < \eta$ pour tout $i = 0, \ldots, p-1$. Démontrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$ et tout $i \in \{0, \ldots, p\}$,*
$$|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon.$$
3. *Soit $y \in I$ et soit $i \in \{0, \ldots, p\}$ tel que $y \in [x_i, x_{i+1}]$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$$f(x_i) - f_n(x_{i+1}) \leq f(y) - f_n(y) \leq f(x_{i+1}) - f_n(x_i).$$
4. *En déduire que (f_n) converge uniformément vers f sur I.*

II. Séries de fonctions

Le but de cette section est d'adapter les résultats obtenus pour les suites de fonctions au cas des séries de fonctions. Comme dans le cas numérique, on peut obtenir certains critères de convergence simple ou uniforme ne nécessitant pas de connaître la limite. Cela donne une bien meilleure efficacité que le point de vue des suites.
On pourra en bénéficier pour l'étude des suites de fonctions, puisque, comme dans le cas numérique, l'étude d'une limite de suite de fonctions (f_n) se ramène à l'étude de la série télescopique $\sum(f_n - f_{n-1})$.

II.1 Modes de convergence

On se donne E un espace vectoriel de dimension finie, F un e.v.n. de dimension finie, et A une partie de E, ainsi qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de A dans F.
On note, pour tout $x \in A$, et tout $n \in \mathbb{N}$,
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$
les sommes partielles de la série $\sum f_n$. Soit également $B \subset A$.

Définition II.1 (Convergence simple, convergence uniforme).
- *La série $\sum f_n$ converge simplement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.*
- *La série $\sum f_n$ converge uniformément sur B si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur B.*

En cas de convergence simple sur B, on notera dans la suite du chapitre
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in B, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$
les restes de la série $\sum f_n$.

Proposition II.2 (Caractérisation de la CVU par le reste). *On suppose que $\sum f_n$ converge simplement sur B. Alors $\sum f_n$ converge uniformément sur B si et seulement si R_n converge uniformément vers 0 sur B.*

Il suffit donc de majorer $R_n(x)$ par une suite indépendante de x, et tendant vers 0. Le plus naturel est d'essayer de majorer la série en normes, ce qui nous ramène à la définition suivante.

Définition II.3 (Convergence normale). *La série $\sum f_n$ converge normalement (sur A) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée, et si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.*

Remarque II.4. 1. *Autrement dit, la convergence normale correspond à la convergence absolue de la série dans $(\mathcal{B}(A,F), \|\cdot\|_\infty)$.*

2. *En pratique, la convergence uniforme, ou la convergence normale, seront souvent obtenues sur des sous-parties B adéquates, comme dans le cas des suites de fonctions. Ce sera en général suffisant pour obtenir les propriétés de continuité.*

Théorème II.5 (CVN implique CVU). *On suppose que les f_n sont bornées sur A. Alors si $\sum f_n$ converge normalement sur A, elle converge uniformément sur A.*

Éléments de preuve. Le reste de la série des normes est indépendant de x, tend vers 0, et majore $\|R_n(x)\|$. □

Remarque II.6. *Il suffit, pour utiliser ce théorème, que les f_n soient bornées à partir d'un certain rang n_0, et que $\sum_{n\geq n_0} f_n$ soit normalement convergente.*

Exemple II.7. 1. *Montrer que $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge uniformément sur $[-A, A]$, pour tout $A \in \mathbb{R}_+$.*

2. *Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{x^2+n^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.*

3. *Soit ζ la fonction de Riemann, définie par*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Montrer que ζ est définie sur $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 1\}$, et que la somme définissant ζ est uniformément convergente sur $D_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > a\}$, pour tout $a > 1$.

Méthode II.8 (Montrer qu'une CV n'est pas normale, ou pas uniforme). 1. *Pour montrer que $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur A,*

- *D'abord, regarder si les f_n sont bornées (au moins à partir d'un certain rang);*
- *si c'est le cas, trouver $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum \|f_n(x_n)\|$ diverge.*
- *On peut aussi calculer explicitement $\|f_n\|_\infty$ (c'est dans certains cas évident, dans d'autres, on peut faire une étude de fonctions) pour se ramener à une série numérique.*

2. *Pour montrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément, c'est un peu plus délicat.*

- *Trouver $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $(R_n(x_n))$ ne tend pas vers 0.*
- *On peut aussi contredire l'une des propriétés qui devrait être vérifiée en cas de CVU (par exemple la continuité de la somme).*

Exemple II.9. 1. *$\sum \frac{x^n}{n!}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.*

2. *$\sum \frac{x^n}{n}$ ne converge pas normalement sur $]-1, 1[$.*

3. *$\sum xe^{-nx}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, mais pas normalement.*

4. *Les trois séries précédentes ne sont pas non plus uniformément convergentes sur les intervalles donnés.*

5. *La somme définissant ζ n'est pas uniformément convergente sur $]1, +\infty[$.*

Exercice II.10. *On rappelle la définition de la fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$:*

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. *Donner le domaine de définition de ζ et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.*
2. *Prouver que ζ est continue sur son domaine de définition.*
3. *Déterminer $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s)$.*
4. *Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et tout $s > 1$, on a*

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$

   En déduire que $\zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1}$.
5. *Démontrer que ζ est convexe.*
6. *Tracer la courbe représentative de ζ.*

Remarque II.11. *La CVN n'est pas une condition nécessaire à la CVU. Une série peut converger uniformément sur un ensemble A sans y converger normalement. Nous donnons des exemples, après avoir donné des méthodes pour gérer cette situation.*

Méthode II.12 (Justifier une CVU sans CVN)**.**
1. *Majorer $R_n(x)$ par les moyens du bord (éventuellement voir des compensations entre des termes consécutifs).*
2. *Un cas particulier important est le cas des séries alternées : Si pour tout $x \in A$, $\sum f_n(x)$ est une série alternée, on est ramené à l'étude de la CVU de f_n vers 0.*
3. *Une autre méthode consiste à faire une transformation d'Abel, ce qui s'apparente à une intégration par parties discrète. Cela permet de gérer le cas de $\sum a_n(x)b_n(x)$, lorsque on connaît la CVU de $\sum b_n(x)$. En notant $R_n(x)$ le reste de cette série, on peut réécrire $b_n = R_{n-1} - R_n$, et réindexer de sorte à regrouper les R_n.*
4. *On fait aussi parfois des transformations d'Abel avec les sommes partielles en écrivant $b_n = B_n - B_{n-1}$. Cela peut être efficace lorsque les sommes partielles (B_n) sont (uniformément) bornées, sans être convergentes.*

Exemple II.13.
1. *Montrer que $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n}$ converge uniformément sur $[0,1]$, mais pas normalement.*
2. *Montrer que $\sum \cos(n)\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ est uniformément convergente sur $[0,1]$.*
3. *Montrer que $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ converge uniformément sur $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$.*

II.2 Régularité et interversions sur des sommes uniformes

On adapte dans cette section les résultats démontrés dans le cadre des suites. Dans la pratique en général, on tentera d'abord de démontrer la convergence normale sur des sous-parties adéquates de A, et sinon, on se ramènera aux études précédentes pour l'étude de la convergence uniforme.

Théorème II.14 (Continuité d'une somme infinie)**.** *Soit $\sum f_n$ une série uniformément convergente sur A. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A, alors $\sum f_n$ est continue sur A.*

Le théorème de la double limite s'adapte en un théorème d'interversion $\lim / \sum$.

Théorème II.15 (Passage à la limite sous $\sum$)**.** *Soit $\sum f_n$ une série uniformément convergente sur A et $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Soit $a \in \overline{A}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_n \in F$. Alors $\sum \ell_n$ converge, et f admet une limite en a, égale à*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

En d'autres termes,

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Exemple II.16. 1. *Déterminer* $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$.

2. *Déterminer* $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x)$.

Théorème II.17 (Intégration terme à terme sur un segment)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions* continues *d'un segment $I = [a, b]$ à valeurs dans un e.v.n. F de dimension finie.*

1. *Si $\sum f_n$ est uniformément convergente sur I, alors*

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)dt$$

converge uniformément sur I vers $x \mapsto \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt$.

2. *En particulier, si $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $[a, b]$,*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Exemple II.18. 1. *Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$,*

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}.$$

2. *À l'aide de l'exemple précédent, calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx$ (on intégrera d'abord sur $[0, c]$ avec $c \in]0, 1[$, puis on fera tendre c vers 1). On admettra que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.*

Théorème II.19 (Dérivation terme à terme)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions d'un intervalle I dans F, telles que :*

(i) les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I;

(ii) la série $\sum f_n$ converge simplement;

(iii) la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I.

Alors $S = \sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et pour tout $x \in I$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x).$$

L'hypothèse (iii) peut être remplacée par :

(iii') la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I.

Ce théorème permet donc de dériver une série terme à terme (sous les hypothèses idoines).

Théorème II.20 (Classe $\mathcal{C}^p$ d'une série)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions d'un intervalle I dans F, et $p \in \mathbb{N}$. On suppose que :*

(i) les f_n sont de classe $\mathcal{C}^p$ sur I;

(ii) la série $\sum f_n$ converge simplement sur I, et pour tout k tel que $1 \leq k \leq p-1$, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I;

(iii) la série $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur I.

Alors $S = \sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I, et pour tout $x \in I$, et tout $k \in [0, p]$,

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x).$$

L'hypothèse (iii) peut être remplacée par :

(iii') la série $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I.

Exemple II.21. *1. Montrer que ζ est dérivable à tout ordre sur $]1, +\infty[$, et exprimer sa dérivée à tout ordre sous forme d'une somme.*

2. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+n)\dots(k+1)x^k = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

On retrouve ainsi la formule du binôme négatif, déjà établie par récurrence en utilisant des produits de Cauchy.

II.3 Techniques asymptotiques

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques pistes, non exhaustives, pour l'étude asymptotique des sommes de séries de fonctions, au bord de leur domaine.

Méthode II.22 (Déterminer une limite)**.** *1. L'outil à privilégier, si possible, est le théorème de la double limite (interversion limite / somme). Attention au fait qu'on ne l'a donné que dans le cas où toutes les limites sont dans F (pas de limite infinie).*

2. Pour montrer qu'on a une limite infinie au bord du domaine, procéder par minoration. Dans le cas où les séries sont positives, on pourra commencer par minorer une somme partielle puis passer à la limite.

3. *On pourra aussi minorer terme à terme de sorte à se ramener à des séries dont l'étude est plus simple.*

Exemple II.23. *Déterminer la limite de ζ quand $x \to 1^+$.*
La méthode utilisée peut s'exprimer sous forme d'une proposition, mais la démonstration doit être remise en oeuvre à chaque fois.

Proposition II.24 (Limite infinie au bord du domaine, HP)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que :*

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq 0$,

(ii) les f_n sont continues en a, et $\sum f_n$ converge (simplement) sur $]a, b]$,

(iii) $\sum f_n(a)$ diverge.

Alors $\lim_{x\to a^+} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = +\infty$.
Cela s'adapte bien sûr aussi pour la borne supérieure de l'intervalle.

Méthode II.25 (Trouver un équivalent)**.** 1. *On peut deviner un équivalent. Par exemple en remplaçant le terme général par un terme qui lui est proche asymptotiquement. Dans ce cas,*

   - *on peut diviser par l'équivalent suspecté (ou son ordre de grandeur sans la constante) et essayer de se ramener au théorème de la double limite;*
   - *Si les ordres de grandeurs des différents termes de la série sont très différents au voisinage du point considéré, (si on a une décroissance rapide de ces ordres de grandeur), il se peut que la somme partielle fournisse un développement asymptotique. C'est ce qui se passe par exemple avec les séries entières $\sum a_n x^n$ en 0, comme on le verra. Cela permet de deviner les équivalents successifs, et donc de se ramener au premier point ci-dessus.*

2. *Dans le cas où pour tout x, $f_n(x) = g(n, x)$ où g est définie sur $[a, +\infty[\times I$, et est monotone par rapport à sa première variable (la deuxième étant fixée), on pourra faire une comparaison avec une intégrale.*

3. *Dans certains cas, on peut essayer, à l'aide de développements asymptotiques, de se ramener à des séries classiques qu'on sait expliciter.*

Exemple II.26. 1. *Équivalent en $+\infty$ de $\zeta(x) - 1$. Développement asymptotique à 3 termes de ζ en $+\infty$.*

2. *Équivalent en $+\infty$ de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+k^2}$.*

3. *Équivalent en $+\infty$ de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_n x)^n}{n!}$, où $a_n = (2^n + 1)^{\frac{1}{n+1}}$. On pourra faire un développement asymptotique de a_n.*

Exercice II.27. *Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}(x+n)}$.*

1. *Montrer que la série de fonctions de terme général f_n est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$. On note f sa somme.*

2. *Montrer que la série de fonctions de terme général f_n est normalement convergente sur $[0, M]$ pour tout $M > 0$. Est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$?*

3. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ puis qu'elle est dérivable et croissante sur $\mathbb{R}_+$.*

4. *Soit $n \geq 1$ et $x_0 \geq n \geq 1$. Montrer que $f(x_0) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.*

5. *Montrer que* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice II.28. *Soit* $u_n(\theta) = \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}$.

1. *Montrer que* $\sum_{n\geq 1} u_n(\theta)$ *converge uniformément sur tout intervalle* $[a, 2\pi - a]$, *avec* $a \in]0, \pi]$.
2. *Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur* $]0, 2\pi[$.

III. Approximations uniformes

III.1 Principes généraux

Définition III.1 (Approximation uniforme à ε près)**.** *Soit* $f : A \to F$ *une application d'une partie* A *de* E *dans l'e.v.n. de dimension finie* F. *On dit que* $g : A \to F$ *est une approximation uniforme de* f *à* ε *près si* $\|g - f\|_\infty \leq \varepsilon$. *On dira que* g *est une* ε*-approximation uniforme de* f.

Remarque III.2. *Cela implique implicitement que* $g - f$ *doit être borné ; mais* g *et* f *ne le sont pas nécessairement.*

Exemple III.3. *La fonction* $x \mapsto x^2$ *est une approximation uniforme à* $\varepsilon = \frac{1}{100}$ *près de* $x \mapsto x^2 + \frac{1}{100}\sin(x)$ *sur* $\mathbb{R}$.

On cherche à savoir si une fonction f donnée peut être approchée uniformément arbitrairement proche par des fonctions d'un certain type.

Définition III.4 (Approximation uniforme par un ensemble de fonctions)**.** *Soit* $\mathcal{G}$ *une partie de* F^A. *On dit que* $f : A \to F$ *peut être approchée uniformément par des fonctions de* $\mathcal{G}$ *si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $g \in \mathcal{G}$ *telle que* g *soit une* ε*-approximation uniforme de* f.

Exemple III.5. *On dit que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est en escalier si elle est en escalier sur tout* $[a, b]$. *On remarquera par exemple que* $x \mapsto E(x)$ *est alors en escalier sur* $\mathbb{R}$ *(mais non bornée). En effet, contrairement au cas d'une fonction en escalier sur un segment, on peut avoir une infinité de paliers. Soit* $L > 0$. *Montrer que toute fonction* L*-lipschitzienne* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *peut être approchée uniformément par des fonctions en escalier.*

Remarque III.6.

1. *Si* $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}(A, \mathbb{R})$, *alors les propositions suivantes sont équivalentes:*

   (i) f *peut être approchée uniformément par des fonctions de* $\mathcal{G}$.

   (ii) $f \in \overline{\mathcal{G}}$ *(pour la norme* $\|\cdot\|_\infty$*).*

   Dans ce cas, f *est nécessairement aussi bornée.*

2. *Ainsi, si* $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{B}$, *les propositions suivantes sont équivalentes:*

   (i) tout f *de* $\mathcal{F}$ *peut être approché uniformément par des fonctions de* $\mathcal{G}$;

   (ii) $\mathcal{G}$ *est dense dans* $\mathcal{F}$ *(pour la norme* $\|\cdot\|_\infty$*).*

Proposition III.7 (Caractérisation séquentielle)**.** *Une application* f *peut être approchée uniformément par des applications de* $\mathcal{G}$ *ssi il existe une suite* $(g_n) \in \mathcal{G}^{\mathbb{N}}$ *telle que* (g_n) *converge uniformément vers* f.

III.2 Approximations uniformes classiques

On généralise la définition des fonctions en escalier, vues dans le cadre de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle que F est un e.v.n. de dimension finie.

Définition III.8 (Fonctions en escalier)**.** *La fonction $f : [a,b] \to F$ est une fonction en escalier s'il existe une subdivision*

$$a = \sigma_0 < \cdots < \sigma_n = b$$

de $[a,b]$ telle que f est constante sur chaque intervalle $[\sigma_i, \sigma_{i+1}[$ de la subdivision. On note Esc$([a,b],F)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$, à valeurs dans F.

Un premier théorème d'approximation uniforme a déjà été vu dans le cas réel au moment de définir l'intégrale de Riemann.

Théorème III.9 (Approximation uniforme de C^0 par Esc)**.** *Les fonctions continues sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans un e.v.n. F de dimension finie peuvent être approchées uniformément par des fonctions en escalier sur $[a,b]$.*
Autrement dit, Esc$([a,b],F)$ est dense dans $C^0([a,b],F)$.

Éléments de preuve. Cela provient de la continuité uniforme de f, issue du théorème de Heine. On peut alors considérer une subdivision régulière suffisamment fine.

□

On note $C^0_M(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues par morceaux de I dans $\mathbb{R}$.

Corollaire III.10 (Approximation uniforme de C^0_M par Esc)**.** *Les fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ peuvent être approchées uniformément par des fonctions en escalier sur $[a,b]$.*
Autrement dit, Esc$([a,b],F)$ est dense dans $C^0_M([a,b],F)$.

Éléments de preuve. Approcher uniformément f sur chaque part d'une subdivision associée (on peut à chaque fois prolonger $f_{|]\sigma_i,\sigma_{i+1}[}$ par continuité pour se ramener à une fonction continue sur un segment).

□

Un autre théorème est nettement plus délicat à obtenir. Sa démonstration est de fait hors-programme. On rappelle que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour S une partie de $\mathbb{R}$, on note $\mathbb{K}_S[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$, restreintes à S.

Théorème III.11 (théorème d'approximation uniforme de Weierstrass)**.** *Toute fonction f continue sur un segment $[a,b]$ peut être approchée uniformément par des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$, définies sur ce segment.*
Autrement dit, en notant $S = [a,b]$, $\mathbb{K}_S[x]$ est dense dans $C^0(S,\mathbb{K})$.

Éléments de preuve. Hors-programme. On le verra peut-être en DM.

□

Corollaire III.12 (Approximation par des fonctions C^∞)**.** *Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ peut être approchée uniformément par des fonctions de classe C^∞.*

Éléments de preuve. Les fonctions polynomiales sont de classe C^∞.

□

Exercice III.13. *Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ une fonction continue par morceaux. On rappelle que f est Riemann-intégrable et on pose :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

1. *Montrer que F est **continue** sur $[a,b]$.*
2. *Montrer que F est **Lipschitzienne** sur $[a,b]$. On précisera la constante de Lipschitz.*
3. *Si f est continue en un point $x_0 \in]a,b[$, montrer que F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Exercice III.14. *Lemme de Riemann-Lebesgue*
L'objectif est de montrer que pour $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{C})$:

$$\lim_{k\to\pm\infty} \int_a^b f(t)e^{ikt}dt = 0$$

1. ***Cas initial :** Soit φ la fonction indicatrice d'un intervalle $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, $\varphi = \chi_{[\alpha,\beta]}$. Montrer explicitement que :*
$$\lim_{k\to\pm\infty} \int_a^b \varphi(t)e^{ikt}dt = 0$$
2. ***Cas des fonctions en escalier :** En déduire la propriété pour toute fonction en escalier $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{C})$.*
3. ***Cas général (l'étape d'approximation) :** Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{C})$. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{C})$ tel que $||f-\varphi||_\infty \leq \varepsilon$.*
4. *Écrire l'inégalité permettant de conclure le Lemme pour f en utilisant φ et en faisant tendre k vers l'infini.*

Exercice III.15 (Application des Sommes de Riemann)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère la subdivision régulière $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour $k = 0,\dots,n$. La somme de Riemann à droite est :*

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

1. *En utilisant la formule de la limite des sommes de Riemann, calculer la limite de la suite u_n définie par :*
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}$$
2. *En adaptant la formule, calculer la limite de :*
$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}$$

Exercice III.16 (Développement Asymptotique des Sommes)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. On étudie la suite $y_m = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(\frac{k}{m})$. Montrer que y_m admet le développement asymptotique suivant :*

$$y_m = \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2m}(f(1)-f(0)) + O\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

Exercice III.17 (Caractérisation de la Fonction Nulle)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on ait :*

$$\int_a^b f(t)t^m dt = 0$$

Démontrer que f est identiquement nulle sur $[a,b]$. (Indication : Utiliser le Théorème de Weierstrass)

Exercice III.18 (Non-Densité sur le Cercle Unité). *L'algèbre des polynômes $\mathbb{C}[z]$ est-elle dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ (fonctions continues sur le cercle unité $\mathbb{S}^1$) ?*
1. On considère la fonction $f(z) = \bar{z}$ pour $z \in \mathbb{S}^1$.
2. Montrer par l'absurde que f ne peut pas être approchée uniformément par une suite de polynômes P_n en z.

Exercice III.19 (Densité de la Base de Fourier). *Montrer que l'espace vectoriel engendré par les fonctions trigonométriques Vect$(e^{ikx})_{k\in\mathbb{Z}}$ est dense dans l'espace des fonctions continues 2π-périodiques $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour la norme L^2.*